



WWW.K2PI.NET.VN
DIỄN ĐÀN TOÁN HỌC ĐÀNH CHO HS KHUỖ THPT



WWW.K2PI.NET.VN

Diễn Đàn Toán THPT - K2pi·Net·Vn

TUYỂN CHỌN CÁC BÀI TOÁN



HỆ PHƯƠNG TRÌNH

Hà Tĩnh tháng 11 năm 2015

Phần I. Đề Bài

Bài Toán 1 . Giải hệ phương trình sau
$$\begin{cases} x^3 + 3x^2 + 3x = 2y^3 + 6y^2 + 6y \\ x^2 + y^2 = y\sqrt{x(x+y)} + x\sqrt{y(y-x)} \end{cases}$$

Bài Toán 2 . Giải hệ phương trình sau
$$\begin{cases} \sqrt{y+2x-1} + \sqrt{1-y} = y+2 \\ x\sqrt{x} = \sqrt{y(x-1)} + \sqrt{x^2-y} \end{cases}$$

Bài Toán 3 . Giải hệ phương trình sau
$$\begin{cases} y^3 + y\sqrt{x^4+y^4} = x^3 + x \\ 2\sqrt{x-y} + \frac{x^3y^3}{(xy + \sqrt{x-y})^2} = xy \end{cases}$$

Bài Toán 4 . Giải hệ phương trình sau
$$\begin{cases} (x+1)y^{2014} = 2\sqrt{x} \\ 2x+3 = 4\sqrt{x} - y^{2015} \end{cases}$$

Bài Toán 5 . Giải hệ phương trình sau
$$\begin{cases} 4x^3 + y^3 + y\sqrt{2x-y} = 3y^2x \\ (x + \sqrt{4x^2+1})(y + 2\sqrt{y^2+1}) = 3xy \end{cases}$$

Bài Toán 6 . Giải hệ phương trình sau
$$\begin{cases} xy(x + \sqrt{x^2+1})(y + \sqrt{y^2+1}) = x^2 + y^2 \\ 29y^2 + 8y\sqrt{y^2-x} + 4xy = x^2 + 16y\sqrt{3y^2+xy} \end{cases}$$

Bài Toán 7 . Giải hệ phương trình sau
$$\begin{cases} x^3 + 3x^2 + 3x = 2y^3 + 6y^2 + 6y \\ x^2 + y^2 = 2(y\sqrt{x(x+y)} + x\sqrt{y(y-x)}) \end{cases}$$

Bài Toán 8 . Giải hệ phương trình sau
$$\begin{cases} \sqrt{x+y+1} + (x+y)^2 + 2y = \sqrt{2x+2} + 3(x+1)^2 + x^2 \\ \sqrt{2xy+2x-3} + \sqrt{5x^2+6x-3} = x+2y \end{cases}$$

Bài Toán 9 . Giải hệ phương trình sau
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + (xy)^2 = 3 \\ x\sqrt{y^2+1} + y\sqrt{x^2+1} = 2(x+y) \end{cases}$$

Bài Toán 10 . Giải hệ phương trình sau
$$\begin{cases} (y + \sqrt{x^2+1})(x + \sqrt{y^2+1}) = 1 \\ 3y^2 + 4\sqrt{1+3x} + 1 = 12x + 12\sqrt{1+y} \end{cases}$$

Bài Toán 11 . Giải hệ phương trình sau
$$\begin{cases} x(y + \sqrt{y^2+1}) = y(x^2+1) \\ (x+2)(y + \sqrt{y^2+1}) = \sqrt{x^2+1} \end{cases}$$

Bài Toán 12 . Giải hệ phương trình sau
$$\begin{cases} (x + \sqrt{x^2+1})(y + \sqrt{y^2+1}) = 1 \\ 3y^2 + 4\sqrt{1+3x} + 1 = 12x + 12\sqrt{1+y} \end{cases}$$

Bài Toán 13 . Giải hệ phương trình sau
$$\begin{cases} (\sqrt{x} + \sqrt{y})(x + y + 1) = 2x\sqrt{y+1} + 2y\sqrt{x-1} + 2\sqrt{y} \\ x\sqrt{x+y} + (y+1)\sqrt[4]{x+3y} = xy + 3x - 1 \end{cases}$$

Bài Toán 14 . Giải hệ phương trình sau
$$\begin{cases} x\sqrt{1+y} + y\sqrt{1+x} = (x+y)\sqrt{xy} \\ (\sqrt{x} + \sqrt{y+1})(-\sqrt{y} + \sqrt{x+1}) = 1 \end{cases}$$

Bài Toán 15 . Giải hệ phương trình sau
$$\begin{cases} (x^2 + 1)(y + \sqrt{2y+1}) = \sqrt{2x^2+1} \\ (1 + 2\sqrt{x+1})(-1 + \sqrt{2y+1}) = 2y\sqrt{x^2+1} \end{cases}$$

Bài Toán 16 . Giải hệ phương trình sau
$$\begin{cases} \frac{x^2}{y^2} + 2\sqrt{x^2+1} + y^2 = 3 \\ x + \frac{y}{\sqrt{1+x^2+x}} + y^2 = 0 \end{cases}$$

Bài Toán 17 . Giải hệ phương trình sau
$$\begin{cases} \frac{x}{y} - \frac{1}{xy} + \frac{y}{x} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} - 1 \\ \frac{x}{x+1} + \frac{y}{y+1} = \frac{x^2 - xy + y^2}{xy} \end{cases}$$

Bài Toán 18 . Giải hệ phương trình sau
$$\begin{cases} 21\sqrt{x} + (y - 7x^2)\sqrt{y} = 315 \\ xy + 7 = (x+1)(y - 7x - 14) \end{cases}$$

Bài Toán 19 . Giải hệ phương trình sau
$$\begin{cases} 4(x^2 + y^2) + 6y\sqrt{1-x} = 3x + 4y + 6 \\ 4\sqrt{2y-x+2} + 6\sqrt{y-7x+8} = 3y - 8x + 23 \end{cases}$$

Bài Toán 20 . Giải hệ phương trình sau
$$\begin{cases} \sqrt{x+2y} - \sqrt{2x-3y} = 1 \\ x^2 + x - 8y + 2 = 2(x-2)\sqrt{2x-3y} \end{cases}$$

Bài Toán 21 . Giải hệ phương trình sau
$$\begin{cases} x\sqrt{x} + y\sqrt{y} = 1 \\ 2x + 5y = \sqrt{(1+x)(2-5y)} \end{cases}$$

Bài Toán 22 . Giải hệ phương trình sau
$$\begin{cases} \sqrt{x + \frac{1}{x+1}} - 1 = \sqrt[3]{\frac{1}{y^3} + \frac{2}{y^2}} \\ \sqrt{x} + \sqrt[4]{y+1} = \sqrt{y} + \sqrt[4]{x+1} \end{cases}$$

Bài Toán 23 . Giải hệ phương trình sau
$$\begin{cases} 2015^{x+y}(x + \sqrt{x^2+1}) + 2015xy(y + \sqrt{y^2+1}) = 0 \\ 3y^2 + 8\sqrt{x+2y+1} + x^2 + 4xy = 4(x+y) + 8\sqrt{y+1} \end{cases}$$

Bài Toán 24 . Giải hệ phương trình sau
$$\begin{cases} (y-1)\sqrt{x-1} = \frac{x^2-y}{2} \\ x + y + \sqrt[4]{2x-x^2} = \sqrt{2y-y^2} + 2 \end{cases}$$

Bài Toán 25 . Giải hệ phương trình sau
$$\begin{cases} \sqrt{x-y+1} + \sqrt{3x+2y+6} = 3x+1 \\ x\sqrt{x-2} + \sqrt{x+3y+1} = (y+5)\sqrt{y+1} \end{cases}$$

Bài Toán 26 . Giải hệ phương trình sau
$$\begin{cases} 3y\sqrt{2+x} + 8\sqrt{2+x} = 10y - 3xy + 12 \\ 5y^3\sqrt{2-x} - 8 = 6y^2 + xy^3\sqrt{2-x} \end{cases}$$

Bài Toán 27 . Giải hệ phương trình sau
$$\begin{cases} \sqrt{x + \frac{1}{x+1}} - 1 = \sqrt[3]{\frac{1}{y^3} + \frac{2}{y^2}} \\ \sqrt{x} + \sqrt[4]{y+1} = \sqrt{y} + \sqrt[4]{x+1} \end{cases}$$

Bài Toán 28 . Giải hệ phương trình sau
$$\begin{cases} x - \sqrt{x} = y + \sqrt{y} \\ (x-y)^2 + y + 3 = 2\sqrt{4x-2y} \end{cases}$$

Bài Toán 29 . Giải hệ phương trình sau
$$\begin{cases} x^2 + 6xy + 4y^2 + 1 = 2x + 4y + 2\sqrt{2xy} \\ \frac{2xy + 10\sqrt{2x^4 + 32y^4}}{x^3y + 4xy^3} = 21 \end{cases}$$

Bài Toán 30 . Giải hệ phương trình sau
$$\begin{cases} x - y = \sqrt{y} + 3 \\ (x-y)^2 + 4(y+1) = 24(\sqrt{2x-y} - 2) \end{cases}$$

Bài Toán 31 . Giải hệ phương trình sau
$$\begin{cases} (7x+5)\sqrt{x} = 12\sqrt{2x^2 - xy} \\ 4y - 5x + 1 = 4\sqrt{(x-y)(2x-y)} \end{cases}$$

Bài Toán 32 . Giải hệ phương trình sau
$$\begin{cases} x - y = 6(1 - \sqrt{xy}) \\ x + \frac{6\sqrt{2(x^6 + y^6)}}{x^2 + xy + y^2} = 3 + \sqrt{2(x^2 + y^2)} \end{cases}$$

Bài Toán 33 . Giải hệ phương trình sau
$$\begin{cases} (x+y+3)\sqrt{x-y} + 2y + 4 = 0 \\ (x-y)(x^2+4) = y^2 + 1 \end{cases}$$

Bài Toán 34 . Giải hệ phương trình sau
$$\begin{cases} (x^2 + y^2 - 7)(x+y)^2 + 2 = 0 \\ (x-3)(x+y) = 1 \end{cases}$$

Bài Toán 35 . Giải hệ phương trình sau
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + \frac{2xy}{x+y} = 1 \\ \sqrt{x+y} = x^2 - y \end{cases}$$

Bài Toán 36 . Giải hệ phương trình sau
$$\begin{cases} 6x - 5y + 4\sqrt{(x-y)(2x-y)} = 11 + 4\sqrt{6} \\ \sqrt{y+1} [2y + 3 + 4(\sqrt{x-y} + \sqrt{2x-y})] = 0 \end{cases}$$

Bài Toán 37 . Giải hệ phương trình sau
$$\begin{cases} 4x^2 + 4xy + y^2 + 2x + y = 2 \\ 8\sqrt{1-2x} + y^2 - 9 = 0 \end{cases}$$

Bài Toán 38 . Giải hệ phương trình sau
$$\begin{cases} \sqrt{4x-3} = (2y^2 + 11)(17-y) + \sqrt{y} \\ y(y-3x+3) = 15x+10 \end{cases}$$

Bài Toán 39 . Giải hệ phương trình sau
$$\begin{cases} (x+5)(x^2+5x+9) = (2y+1)(3-y) \\ \sqrt{x+3} + \sqrt[3]{30-2y} = 4(y-1) + \sqrt{2y-2} \end{cases}$$

Bài Toán 40 . Giải hệ phương trình sau
$$\begin{cases} y^3 = 2(\sqrt{2x^3} + \sqrt{2x} - y) \\ y(y-x-2) = 3-3x \end{cases}$$

Bài Toán 41 . Giải hệ phương trình sau
$$\begin{cases} \frac{xy-1}{1+xy} - \frac{1}{1+y^2} = \frac{x^2}{1+x^2} \\ \sqrt{x-1}\sqrt{y-1}\sqrt{x^2+x+1} + (x+1)\sqrt{x^2-x+1} = 2x^2-x+y \end{cases}$$

Bài Toán 42 . Giải hệ phương trình sau
$$\begin{cases} x + \sqrt{x+y} - 2y = y^2 + 2 \\ \sqrt[4]{x + \sqrt{x+y} - 1} = 2 - 2y - x \end{cases}$$

Bài Toán 43 . Giải hệ phương trình sau
$$\begin{cases} \sqrt[4]{2x^2 - x^3} = 9 + 4y^2 - 12y \\ \sqrt[4]{x}(2y^2 + \sqrt{2-x}) = 4y^4 + x - 2 \end{cases}$$

Bài Toán 44 . Giải hệ phương trình sau
$$\begin{cases} 2x^2 + \sqrt{2-x} + \sqrt{y-1} - 34 = 2xy + x \\ 2y^2 + \sqrt{2-x} + \sqrt{y-1} - 34 = -xy + 2y \end{cases}$$

Bài Toán 45 . Giải hệ phương trình sau
$$\begin{cases} 3x(\sqrt{x-3} - y\sqrt{y}) + \sqrt{3x-3y^3} + \sqrt{x+y-5} = 3 \\ 3y^3 - 3y + 8 = 2x \end{cases}$$

Bài Toán 46 . Giải hệ phương trình sau
$$\begin{cases} 2y - 3x + \sqrt{y(x-2)} = 4(\sqrt{x-2} - \sqrt{y}) - 6 \\ \sqrt{y} + 2\sqrt{y(xy-x+5)} = 2(y+2) - \sqrt{5x+6} \end{cases}$$

Bài Toán 47 . Giải hệ phương trình sau
$$\begin{cases} x^2(y^2 + 1 + \sqrt{x}) - (\sqrt{x} + 1)(y-2) = y^3 - 2y^2 \\ y\sqrt{x^2-x+1} = x^3 - 3x - 3 + 2y \end{cases}$$

Bài Toán 48 . Giải hệ phương trình sau
$$\begin{cases} \sqrt{3x^2 + 6xy + 4y^2 + 2y + 1} = 3x + 2y - 1 \\ 4\sqrt{x+y+2} + 4y\sqrt{2(y+1)} = 5y^2 + 6x + 3 + \sqrt{2(y^2+x)} \end{cases}$$

Bài Toán 49 . Giải hệ phương trình sau
$$\begin{cases} y^4 - 2xy^2 + 7y^2 = -x^2 + 7x + 8 \\ \sqrt{3-x} + \sqrt{y^2+1} = x^3 + x^2 - 4y^2 + 3 \end{cases}$$

Phần II. Lời Giải Chi Tiết

Bài toán 1

Giải hệ phương trình sau
$$\begin{cases} x^3 + 3x^2 + 3x = 2y^3 + 6y^2 + 6y & (1) \\ x^2 + y^2 = y\sqrt{x(x+y)} + x\sqrt{y(y-x)} & (2) \end{cases}$$

Hướng Dẫn Giải

Điều kiện $x(x+y) \geq 0$, $y(y-x) \geq 0$

Ta có

$$\begin{cases} y\sqrt{x(x+y)} \leq \frac{x^2 + xy + y^2}{2} \\ x\sqrt{y(y-x)} \leq \frac{x^2 - xy + y^2}{2} \end{cases} \Rightarrow y\sqrt{x(x+y)} + x\sqrt{y(y-x)} \leq x^2 + y^2 \quad (3)$$

Khi đó

$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = x^2 + xy \\ x, y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}y \\ x = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}y \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}y \\ x, y \geq 0 \\ x = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}y \\ x, y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}y \\ x, y \geq 0 \\ x = y = 0 \end{cases}$$

Với $\begin{cases} x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}y \\ x, y \geq 0 \end{cases}$ thay lên phương trình còn lại ta được

$$\begin{aligned} & \left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}y\right)^3 + 3\left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}y\right)^2 + 3 \cdot \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}y = 2y^3 + 6y^2 + 6y \\ \Leftrightarrow & (-4 + \sqrt{5})y^3 - \left(\frac{3 + 3\sqrt{5}}{2}\right)y^2 + \frac{-15 + 3\sqrt{5}}{2}y = 0 \Leftrightarrow y = 0 \Rightarrow x = 0 \end{aligned}$$

Với $x = y = 0$ thay lên phương trình trên thỏa mãn.

Vậy nghiệm của hệ phương trình là: $(x; y) = (0; 0)$ □

Bài toán 2

Giải hệ phương trình sau
$$\begin{cases} \sqrt{y+2x-1} + \sqrt{1-y} = y+2 \\ x\sqrt{x} = \sqrt{y(x-1)} + \sqrt{x^2-y} \end{cases}$$

Hướng Dẫn Giải

Phương trình thứ hai của hệ ta có:

$$\sqrt{y(x-1)} + \sqrt{x^2-y} = x\sqrt{x}$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \sqrt{xy-y} - \sqrt{x^2-y} &= \frac{xy-y-(x^2-y)}{\sqrt{y(x-1)} + \sqrt{x^2-y}} = \frac{x(y-x)}{x\sqrt{x}} = \frac{y-x}{\sqrt{x}} \\ \Rightarrow 2\sqrt{xy-y} &= \frac{y-x}{\sqrt{x}} + x\sqrt{x} = \frac{x^2-x+y}{\sqrt{x}} \\ \Rightarrow 2\sqrt{y(x^2-x)} &= x^2-x+y \\ \Rightarrow 4y(x^2-x) &= (x^2-x+y)^2 \\ \Leftrightarrow (y-x^2+x)^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow y &= x^2-x \end{aligned}$$

Thế vào phương trình thứ nhất của hệ ta có

$$\sqrt{x^2+x-1} + \sqrt{-x^2+x+1} = x^2-x+2$$

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM ta có

$$\begin{aligned} x^2-x+2 &= \sqrt{x^2+x-1} + \sqrt{-x^2+x+1} \leq \frac{x^2+x-1+1}{2} + \frac{-x^2+x+1+1}{2} \\ \Leftrightarrow (x-1)^2 &\leq 0 \quad \Leftrightarrow x=1 \quad \Rightarrow y=0 \end{aligned}$$

Thử lại thấy thỏa mãn

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất (1; 0) □

Bài toán 3

Giải hệ phương trình sau
$$\begin{cases} y^3 + y\sqrt{x^4+y^4} = x^3+x \\ 2\sqrt{x-y} + \frac{x^3y^3}{(xy+\sqrt{x-y})^2} = xy \end{cases}$$

Hướng Dẫn Giải

Ta thấy $xy = 0$ không phải là nghiệm của phương trình thứ hai

Chia cả 2 vế pt 2 cho xy ta được

$$\frac{2\sqrt{x-y}}{xy} + \frac{1}{(1+\frac{\sqrt{x-y}}{xy})^2} = 1$$

Đặt $t = \frac{\sqrt{x-y}}{xy}$ thì phương trình trở thành

$$2t + \frac{1}{(1+t)^2} = 1 \Leftrightarrow (1-2t)(1+t)^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} t=0 \\ t=-\frac{3}{2} \end{cases}$$

• Với $t = 0 \Rightarrow x = y$

Thay vào phương trình đầu ta được nghiệm $x = y = \frac{1}{\sqrt[4]{2}}$ (T/M)

• Với $t = -\frac{3}{2} \Leftrightarrow 2\sqrt{x-y} + 3xy = 0$

Từ phương trình đầu của hệ ta có được

$$y^4 + y^2\sqrt{x^4+y^4} = xy(x^2+1) \Rightarrow xy > 0$$

Từ đó suy ra trường hợp này vô nghiệm

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = y = \frac{1}{\sqrt[4]{2}}$ □

Bài toán 4

Giải hệ phương trình sau
$$\begin{cases} (x + 1)y^{2014} = 2\sqrt{x} \\ 2x + 3 = 4\sqrt{x} - y^{2015} \end{cases}$$

Hướng Dẫn Giải

Điều kiện $x \geq 0$.

Xét phương trình thứ nhất của hệ,

$$(x + 1)y^{2014} = 2\sqrt{x} \leq x + 1 \Rightarrow y^{2014} \leq 1 \Rightarrow y \in [-1, 1].$$

Khi đó $0 = 2x - 4\sqrt{x} + 3 + y^{2015} \geq 2x - 4\sqrt{x} + 3 - 1 = 2(\sqrt{x} - 1)^2 \geq 0$.

Do đó $x = 1$ và $y = -1$ thỏa mãn hệ

Vậy hệ có nghiệm duy nhất $(1; -1)$ □

Bài toán 5

Giải hệ phương trình sau
$$\begin{cases} 4x^3 + y^3 + y\sqrt{2x - y} = 3y^2x \\ (x + \sqrt{4x^2 + 1})(y + 2\sqrt{y^2 + 1}) = 3xy \end{cases}$$

Hướng Dẫn Giải

Ta có $3xy = (x + \sqrt{4x^2 + 1})(y + 2\sqrt{y^2 + 1}) \geq 0$.

Nhận thấy $xy = 0$ không là nghiệm nên xét hai trường hợp sau

Nếu $x > 0$ thì $y > 0$ và có

$$(x + \sqrt{4x^2 + 1})(y + 2\sqrt{y^2 + 1}) \geq (x + 2x)(y + 2y) = 9xy > 3xy$$

Suy ra trường hợp này vô nghiệm.

Nếu $x < 0$ thì $y < 0$ và xét phương trình thứ nhất

$$-\sqrt{2x - y} = -3xy + \frac{4x^3}{y} + \frac{y^2}{2} + \frac{y^2}{2} \geq -3xy + 3xy + \sqrt{2x - y} = 0 \Rightarrow y = 2x.$$

Thay vào phương trình thứ hai của hệ ta có

$$\begin{aligned} (x + \sqrt{4x^2 + 1})(2x + 2\sqrt{4x^2 + 1}) &= 6x^2 \\ \Leftrightarrow (x + \sqrt{4x^2 + 1})^2 &= 3x^2 \\ \Leftrightarrow x + \sqrt{4x^2 + 1} &= -\sqrt{3}x \\ \Leftrightarrow x &= -\frac{1}{\sqrt{2\sqrt{3}}} \Rightarrow y = -\frac{2}{\sqrt{2\sqrt{3}}} \quad (T/M) \end{aligned}$$

Vậy hệ có nghiệm duy nhất $(x; y) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2\sqrt{3}}}; -\frac{2}{\sqrt{2\sqrt{3}}}\right)$

Bài toán 6

Giải hệ phương trình sau
$$\begin{cases} xy(x + \sqrt{x^2 + 1})(y + \sqrt{y^2 + 1}) = x^2 + y^2 \\ 29y^2 + 8y\sqrt{y^2 - xy} + 4xy = x^2 + 16y\sqrt{3y^2 + xy} \end{cases}$$

Hướng Dẫn Giải

Ta có

$$xy = \frac{x^2 + y^2}{(x + \sqrt{x^2 + 1})(y + \sqrt{y^2 + 1})} \geq 0$$

Nếu $x = 0$ hoặc $y = 0$ thì tương ứng từ phương trình thứ nhất ta có $y = 0$ hoặc $x = 0$
 Đồng thời thấy $(x; y) = (0; 0)$ cũng thỏa mãn phương trình thứ hai.

Với $xy > 0$ ta lần lượt xét hai trường hợp sau

- Nếu $y > 0$ thì với phương trình thứ hai, ta có

$$29 + 8\sqrt{1 - \frac{x}{y}} + 4\frac{x}{y} = \left(\frac{x}{y}\right)^2 + 16\sqrt{3 + \frac{x}{y}}$$

$$\Leftrightarrow 16\left(\sqrt{3+t} - 2\right) - 8\sqrt{1-t} + t^2 - 4t + 3 = 0 \quad ; \text{ Với } t = \frac{x}{y} \in (0; 1]$$

$$\Leftrightarrow \frac{16(t-1)}{\sqrt{3+t}+2} - 8\sqrt{1-t} + (t-1)(t+3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1-t} \left[\frac{-16\sqrt{1-t}}{\sqrt{3+t}+2} - 8 - \sqrt{1-t}(t+3) \right] = 0$$

Do $\frac{-16\sqrt{1-t}}{\sqrt{3+t}+2} - 8 - \sqrt{1-t}(t+3) < 0 \quad \forall t \in (0; 1]$ nên phương trình suy ra $t = 1$

Khi đó $x = y$, thay vào phương trình thứ nhất của hệ, ta được

$$x^2(x + \sqrt{x^2 + 1})^2 = 2x^2$$

$$\Leftrightarrow x + \sqrt{x^2 + 1} = \sqrt{2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

- Nếu $y < 0$ thì với phương trình thứ hai, ta có

$$29 - 8\sqrt{1 - \frac{x}{y}} + 4\frac{x}{y} = \left(\frac{x}{y}\right)^2 - 16\sqrt{3 + \frac{x}{y}}$$

Với $t = \frac{x}{y} \in (0; 1]$ ta xét hàm số $f(t) = t^2 - 4t - 16\sqrt{3+t} + 8\sqrt{1-t} - 29$

Dễ dàng nhận thấy $f(t)$ nghịch biến trên $(0; 1]$ nên $f(t) < f(0) < 0 \quad ; \quad \forall t \in (0; 1]$.

Vậy hệ đã cho có hai nghiệm $(0; 0)$ và $\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}; \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$ □

Bài toán 7

Giải hệ phương trình sau
$$\begin{cases} x^3 + 3x^2 + 3x = 2y^3 + 6y^2 + 6y \\ x^2 + y^2 = 2(y\sqrt{x(x+y)} + x\sqrt{y(y-x)}) \end{cases}$$

Hướng Dẫn Giải

Nếu một trong hai số $x = 0$ hoặc $y = 0$ thì từ phương trình thứ nhất nhận số còn lại là 0, nó cũng thỏa phương trình còn lại nên $(0; 0)$ là một nghiệm của hệ.

Đặt $f(t) = t^3 + 3t^2 + 3t$ thì phương trình thứ nhất của hệ là $f(x) = 2f(y)$.

Do $f'(t) = 3t^2 + 6t + 3 = 3(t + 1)^2 \geq 0$ nên f đồng biến trên \mathbb{R} .

Khi đó nếu $x > 0$ thì $0 = f(0) < f(x) = 2f(y) \Rightarrow f(y) > 0 \Rightarrow y > 0$.

Tương tự nếu $x < 0$ thì dẫn đến $y < 0$.

Bây giờ ta lần lượt xét các trường hợp sau

Nếu $x < 0$ thì $y < 0$ khi đó phương trình thứ hai

$$0 < x^2 + y^2 = 2 \left(y\sqrt{x(x+y)} + x\sqrt{y(y-x)} \right) < 0.$$

Với $x > 0$ thì $y > 0$, đặt $y = tx, t > 0$ và thay vào phương trình thứ hai của hệ

$$x^2 + t^2x^2 = 2 \left[tx\sqrt{x(x+tx)} + x\sqrt{tx(tx-x)} \right]$$

$$\Leftrightarrow t\sqrt{t+1} + \sqrt{t^2-t} = \frac{t^2+1}{2}, \quad (a)$$

$$\Rightarrow \frac{t(t^2+1)}{t\sqrt{t+1} - \sqrt{t^2-t}} = \frac{t^2+1}{2}$$

$$\Rightarrow t\sqrt{t+1} - \sqrt{t^2-t} = 2t, \quad (b)$$

Cộng hai phương trình (a) và (b) theo vế ta có

$$2t\sqrt{t+1} = \frac{t^2+4t+1}{2} \Leftrightarrow t^2+2t\sqrt{t+1}+t+1 = \frac{3(t^2+2t+1)}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left[\sqrt{2} \left(t + \sqrt{t+1} \right) \right]^2 = \left[\sqrt{3} (t+1) \right]^2 \Leftrightarrow \sqrt{2} \left(t + \sqrt{t+1} \right) = \sqrt{3} (t+1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 + \sqrt{6} - \sqrt{3} - \sqrt{2} \\ t = 2 + \sqrt{6} + \sqrt{3} + \sqrt{2} \end{cases}$$

Với $t = 2 + \sqrt{6} - \sqrt{3} - \sqrt{2}$ ta thay $y = t_1x$ vào phương trình thứ nhất của hệ ta được

$$(2t_1^3 - 1)x^3 + (6t_1^2 - 3)x^2 + (6t_1 - 3)x = 0$$

Đề ý thấy các hệ số đều dương nên phương trình không thể có nghiệm dương.

Tương tự phương trình cũng vô nghiệm với trường hợp $t = 2 + \sqrt{6} + \sqrt{3} + \sqrt{2}$

Vậy hệ có nghiệm duy nhất $(0; 0)$. □

Bài toán 8

Giải hệ phương trình sau
$$\begin{cases} \sqrt{x+y+1} + (x+y)^2 + 2y = \sqrt{2x+2} + 3(x+1)^2 + x^2 \\ \sqrt{2xy+2x-3} + \sqrt{5x^2+6x-3} = x+2y \end{cases}$$

Hướng Dẫn Giải

Ta có phương trình thứ nhất tương đương

$$\sqrt{x+y+1} + (x+y)^2 + 2(x+y) = \sqrt{2x+1+1} + (2x+1)^2 + 2(2x+1)$$

Xét hàm $f(t) = \sqrt{t+1} + t^2 + 2t$ với $t \geq -1$

$$f'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t+1}} + 2t + 2 > 0 \quad \forall t \geq -1$$

Vậy hàm đồng biến suy ra $x + y = 2x + 1 \Leftrightarrow y = x + 1$

Thế vào phương trình thứ hai ta có

$$\sqrt{2x^2 + 4x - 3} + \sqrt{5x^2 + 6x - 3} = 3x + 2$$

Thấy $x = -\frac{2}{3}$ không phải là nghiệm nên điều kiện là $x > -\frac{2}{3}$.

Phương trình tương đương với

$$\begin{aligned} \frac{3x^2 + 2x}{\sqrt{5x^2 + 6x - 3} - \sqrt{2x^2 + 4x - 3}} &= 3x + 2 \\ x &= \sqrt{5x^2 + 6x - 3} - \sqrt{2x^2 + 4x - 3} \\ \Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{5x^2 + 6x - 3} - \sqrt{2x^2 + 4x - 3} \\ 3x + 2 = \sqrt{5x^2 + 6x - 3} + \sqrt{2x^2 + 4x - 3} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow 2x + 1 = \sqrt{5x^2 + 6x - 3} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{1}{2} \\ 4x^2 + 4x + 1 = 5x^2 + 6x - 3 \end{cases} &\Leftrightarrow x = \sqrt{5} - 1 \rightarrow y = \sqrt{5} \end{aligned}$$

Thử lại thấy thỏa mãn

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $(x; y) = (\sqrt{5} - 1; \sqrt{5})$ □

Bài toán 9

Giải hệ phương trình sau $\begin{cases} x^2 + y^2 + (xy)^2 = 3 \\ x\sqrt{y^2 + 1} + y\sqrt{x^2 + 1} = 2(x + y) \end{cases}$

Hướng Dẫn Giải

Từ phương trình một ta có :

$$\begin{aligned} 3 - x^2y^2 &= x^2 + y^2 \geq 2xy \\ \Leftrightarrow (xy)^2 + 2xy - 3 &\leq 0 \quad \Leftrightarrow -3 \leq xy \leq 1 \end{aligned}$$

Xét phương trình hai chúng ta được :

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow x(\sqrt{y^2 + 1} - 1) + y(\sqrt{x^2 + 1} - 1) &= x + y \\ \Leftrightarrow \frac{xy^2}{\sqrt{y^2 + 1} + 1} + \frac{yx^2}{\sqrt{x^2 + 1} + 1} &= x + y \\ \Leftrightarrow xy \left(\frac{y}{\sqrt{y^2 + 1} + 1} + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1} + 1} \right) &= x + y \\ \Leftrightarrow xy \left(\frac{x\sqrt{y^2 + 1} + y\sqrt{x^2 + 1} + x + y}{(\sqrt{x^2 + 1} + 1)(\sqrt{y^2 + 1} + 1)} \right) &= x + y \end{aligned}$$

Kết hợp với phương trình đầu suy ra $\begin{cases} x + y = 0 \\ (\sqrt{x^2 + 1} + 1)(\sqrt{y^2 + 1} + 1) = 3xy \end{cases}$

Mặt khác

$$3xy = (\sqrt{x^2 + 1} + 1)(\sqrt{y^2 + 1} + 1) \geq 4 \Leftrightarrow xy \geq \frac{4}{3}$$

Kết hợp với điều kiện xy đã tìm được suy ra hệ phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x^2 + y^2 + x^2y^2 = 3 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình trên ta thu được các nghiệm $(1; -1)$ và $(-1; 1)$

Bài toán 10

Giải hệ phương trình sau $\begin{cases} (y + \sqrt{x^2 + 1})(x + \sqrt{y^2 + 1}) = 1 \\ 3y^2 + 4\sqrt{1 + 3x} + 1 = 12x + 12\sqrt{1 + y} \end{cases}$

Hướng Dẫn Giải

Xử lý phương trình một như sau

Đặt $a = x + \sqrt{x^2 + 1} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{a^2 - 1}{2a} \\ \sqrt{x^2 + 1} = \frac{a^2 + 1}{2a} \end{cases} \quad (a > 0)$

Và $b = y + \sqrt{y^2 + 1} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{b^2 - 1}{2b} \\ \sqrt{y^2 + 1} = \frac{b^2 + 1}{2b} \end{cases} \quad (b > 0)$

Khi đó phương trình thứ nhất trở thành :

$$\begin{aligned} & \left(\frac{a^2 - 1}{2a} + \frac{b^2 + 1}{2b}\right) \left(\frac{a^2 + 1}{2a} + \frac{b^2 - 1}{2b}\right) = 1 \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} ab = 1 \\ ab(a + b)^2 + (a - b)^2 = 0 \quad (VT > 0) \end{cases} \Rightarrow ab = 1 \\ \Rightarrow & (y + \sqrt{x^2 + 1})(x + \sqrt{y^2 + 1}) = 1 \end{aligned}$$

Phương trình này ta suy ra được $x = -y$. Thế vào phương trình thứ hai ta có

$$3x^2 + 4\sqrt{1 + 3x} + 1 = 12x + 12\sqrt{1 - x}$$

Phương trình này giải ra chỉ có nghiệm $x = 1$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm $(1; -1)$ □

Bài toán 11

Giải hệ phương trình sau $\begin{cases} x(y + \sqrt{y^2 + 1}) = y(x^2 + 1) \\ (x + 2)(y + \sqrt{y^2 + 1}) = \sqrt{x^2 + 1} \end{cases}$

Hướng Dẫn Giải

Do $x = -2$ không là nghiệm nên chia theo vế, ta nhận được $\frac{x}{(x + 2)\sqrt{x^2 + 1}} = y$

Thay vào phương trình thứ nhất, ta được

$$x \left(\frac{x}{(x+2)\sqrt{x^2+1}} + \sqrt{\frac{x^2}{(x+2)^2(x^2+1)} + 1} \right) = \frac{x\sqrt{x^2+1}}{(x+2)}$$

Do $x = 0$ không là nghiệm và $x > -2$ nên phương trình tương đương với

$$x + \sqrt{x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 4} = x^2 + 1$$

$$\Leftrightarrow 6x^3 + 3x^2 + 6x + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} \Rightarrow y = -\frac{2\sqrt{5}}{15} \quad (T/M)$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $\left(-\frac{1}{2}; -\frac{2\sqrt{5}}{15}\right)$ □

Bài toán 12

Giải hệ phương trình sau
$$\begin{cases} (x + \sqrt{x^2 + 1})(y + \sqrt{y^2 + 1}) = 1 \\ 3y^2 + 4\sqrt{1 + 3x} + 1 = 12x + 12\sqrt{1 + y} \end{cases}$$

Hướng Dẫn Giải

Phương trình thứ nhất tương đương với

$$x + \sqrt{x^2 + 1} = (-y) + \sqrt{(-y)^2 + 1} \Leftrightarrow y = -x$$

Thay vào phương trình còn lại ta có

$$3x^2 + 4\sqrt{1 + 3x} + 1 = 12x + 12\sqrt{1 - x}$$

$$\Leftrightarrow 12\sqrt{1 - x} + 4(2 - \sqrt{1 + 3x}) - 3x^2 + 12x - 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1 - x} \left[12 + \frac{4\sqrt{1 - x}}{2 + \sqrt{1 + 3x}} + 3\sqrt{1 - x}(x - 3) \right] = 0$$

Ta có $\sqrt{1 - x} \leq \frac{2 - x}{2}$ nên $3(x - 3)\sqrt{1 - x} \geq \frac{3}{2}(2 - x)(x - 3) = f(x)$

Để dàng có được

$$\min f(x) = f\left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{35}{3}$$

Do đó $12 + \frac{4\sqrt{1 - x}}{2 + \sqrt{1 + 3x}} + 3(x - 3)\sqrt{1 - x} \geq 12 - \frac{35}{3} = \frac{1}{3} > 0$

Vậy hệ có nghiệm duy nhất $(x; y) = (1; -1)$ □

Bài toán 13

Giải hệ phương trình sau
$$\begin{cases} (\sqrt{x} + \sqrt{y})(x + y + 1) = 2x\sqrt{y+1} + 2y\sqrt{x-1} + 2\sqrt{y} \\ x\sqrt{x+y} + (y+1)\sqrt[4]{x+3y} = xy + 3x - 1 \end{cases}$$

Hướng Dẫn Giải

Điều kiện: $x \geq 1 ; y \geq 0$

Phương trình thứ nhất tương đương với

$$x\sqrt{y+1} + y\sqrt{x-1} = \frac{x+y+1}{2}\sqrt{x} + \frac{x+y-1}{2}\sqrt{y} \quad (*)$$

Ta có

$$VT(*) = \sqrt{x}\sqrt{x}\sqrt{y+1} + \sqrt{y}\sqrt{y}\sqrt{x-1} \leq \frac{x+y+1}{2}\sqrt{x} + \frac{x+y-1}{2}\sqrt{y} = VP(*)$$

Đẳng thức xảy ra khi $y = x - 1$. Thế vào phương trình hai ta có

$$\begin{aligned} x\sqrt{2x-1} + x\sqrt[4]{4x-3} &= x^2 + 2x - 1 \quad (x \geq \frac{3}{4}) \\ \Rightarrow \sqrt{2x-1} + \sqrt[4]{4x-3} &= x + 2 - \frac{1}{x} = x + \frac{2x-1}{x} \geq 2\sqrt{2x-1} \\ \Leftrightarrow \sqrt[4]{4x-3} &\geq \sqrt{2x-1} \\ \Leftrightarrow 4x-3 &\geq (2x-1)^2 \\ \Leftrightarrow 4(x-1)^2 &\leq 0 \\ \Leftrightarrow x=1 &\Rightarrow y=0 \quad (T/M) \end{aligned}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm là $\begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases}$ □

Bài toán 14

Giải hệ phương trình sau $\begin{cases} x\sqrt{1+y} + y\sqrt{1+x} = (x+y)\sqrt{xy} \\ (\sqrt{x} + \sqrt{y+1})(-\sqrt{y} + \sqrt{x+1}) = 1 \end{cases}$

Hướng Dẫn Giải

Điều kiện $x, y \geq 0$

Đặt $\begin{cases} a = \sqrt{x} + \sqrt{x+1} \\ b = \sqrt{y} + \sqrt{y+1} \end{cases}$ (Với $a, b \geq 1$)

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{a} = \sqrt{x+1} - \sqrt{x} \\ \frac{1}{b} = \sqrt{y+1} - \sqrt{y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = \frac{1}{2} \left(a - \frac{1}{a} \right) \\ \sqrt{x+1} = \frac{1}{2} \left(a + \frac{1}{a} \right) \\ \sqrt{y} = \frac{1}{2} \left(b - \frac{1}{b} \right) \\ \sqrt{y+1} = \frac{1}{2} \left(b + \frac{1}{b} \right) \end{cases}$$

Từ phương trình thứ hai của hệ suy ra

$$\begin{aligned} \left(a + \frac{1}{b} + \frac{1}{a} - b \right) \left(a + \frac{1}{b} + b - \frac{1}{a} \right) &= 4 \\ \Leftrightarrow \left(a + \frac{1}{b} \right)^2 - \left(b - \frac{1}{a} \right)^2 &= 4 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^4 - 1}{a^2} + \frac{b^4 - 1}{b^2} + 2\left(\sqrt{\frac{a}{b}} - \sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2 = 0$$

Mà $\begin{cases} a^4 - 1 \geq 0 \\ b^4 - 1 \geq 0 \end{cases}$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $a = b = 1$ hay $x = y = 0$

Thay $x = y = 0$ vào phương trình (1) thỏa mãn.

Vậy nghiệm của hệ là $(0; 0)$ □

Bài toán 15

Giải hệ phương trình sau $\begin{cases} (x^2 + 1)(y + \sqrt{2y + 1}) = \sqrt{2x^2 + 1} \\ (1 + 2\sqrt{x + 1})(-1 + \sqrt{2y + 1}) = 2y\sqrt{x^2 + 1} \end{cases}$

Hướng Dẫn Giải

Điều kiện của hệ phương trình: $x \geq -1; y \geq -\frac{1}{2}$

Phương trình thứ hai tương đương với

$$(1 + 2\sqrt{x + 1})2y = (2y\sqrt{x^2 + 1})(1 + \sqrt{2y + 1})$$

- Nếu $y = 0$ hệ có nghiệm $(x; y) = (0; 0)$
- Nếu $y \neq 0$ hệ tương đương với

$$\begin{cases} y + \sqrt{2y + 1} = \frac{\sqrt{2x^2 + 1}}{x^2 + 1} \\ \sqrt{2y + 1} + 1 = \frac{2\sqrt{x + 1} + 1}{\sqrt{x^2 + 1}} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (\sqrt{2y + 1} + 1)^2 = \left(\frac{\sqrt{2x^2 + 1} + 1}{\sqrt{x^2 + 1}}\right)^2 \\ \sqrt{2y + 1} + 1 = \frac{2\sqrt{x + 1} + 1}{\sqrt{x^2 + 1}} \end{cases}$$

Từ đây suy ra $\sqrt{2x^2 + 1} = 2\sqrt{x + 1} \Leftrightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{10}}{2}$

Thay x tìm được vào phương trình thứ hai ta tính được y □

Bài toán 16

Giải hệ phương trình sau $\begin{cases} \frac{x^2}{y^2} + 2\sqrt{x^2 + 1} + y^2 = 3 \\ x + \frac{y}{\sqrt{1 + x^2} + x} + y^2 = 0 \end{cases}$

Hướng Dẫn Giải

Hệ phương trình tương đương với $\begin{cases} \left(\frac{x}{y} + y\right)^2 + 2(\sqrt{1 + x^2} - x) = 3 \\ \left(\frac{x}{y} + y\right) + (\sqrt{1 + x^2} - x) = 0 \end{cases}$

Cộng đại số suy ra phương trình

$$\left(\frac{x}{y} + y\right)^2 - 2\left(\frac{x}{y} + y\right) - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{y} + y = -1 \\ \frac{x}{y} + y = 3 \end{cases}$$

- Trường hợp 1. Với $\frac{x}{y} + y = -1 \Rightarrow \sqrt{1+x^2} - x = 1$ hệ này có nghiệm $(x; y) = (0; -1)$
- Trường hợp 2. Với $\frac{x}{y} + y = 3 \Rightarrow \sqrt{1+x^2} - x = -3$, hệ này có 2 nghiệm $(x; y) = \left(\frac{4}{3}; \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}\right)$

Vậy hệ phương trình đã cho có 3 nghiệm $(0; -1)$, $\left(\frac{4}{3}; \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}\right)$ □

Bài toán 17

Giải hệ phương trình sau
$$\begin{cases} \frac{x}{y} - \frac{1}{xy} + \frac{y}{x} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} - 1 \\ \frac{x}{x+1} + \frac{y}{y+1} = \frac{x^2 - xy + y^2}{xy} \end{cases}$$

Hướng Dẫn Giải

Điều kiện $x, y \neq \{0, -1\}$

Phương trình đầu tương đương với

$$(xy - 1)(x^2 + y^2 + xy) = 0$$

$$\Leftrightarrow xy = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} = 1 \quad (3)$$

Phương trình thứ hai tương đương

$$3 - \left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1}\right) = \frac{x^2 + y^2}{xy} \quad (4)$$

Kết hợp (3) và (4)

$$\Rightarrow 2 = \frac{x^2 + y^2}{xy} \Leftrightarrow x = y$$

Từ đó ta kết hợp các dấu bằng tìm được $x = y = 1$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(1; 1)$ □

Bài toán 18

Giải hệ phương trình sau
$$\begin{cases} 21\sqrt{x} + (y - 7x^2)\sqrt{y} = 315 \\ xy + 7 = (x + 1)(y - 7x - 14) \end{cases}$$

Hướng Dẫn Giải

Từ phương trình thứ hai của hệ ta suy ra $y = 7x^2 + 21x + 21$

Thay vào phương trình đầu tiên ta có

$$\sqrt{x} + (x^2 + x)\sqrt{7x^2 + 21x + 21} = 15$$

$$\Leftrightarrow (x - 1) \left[\frac{1}{\sqrt{x+1}} + \frac{(x^2 + x)(x + 4)}{\sqrt{7x^2 + 21x + 21}} + 7(x + 2) \right] = 0$$

Vì $x \geq 0 \Rightarrow x = 1$

Vậy nghiệm của hệ là $(x, y) = (1, 49)$ □

Bài toán 19

Giải hệ phương trình sau
$$\begin{cases} 4(x^2 + y^2) + 6y\sqrt{1-x} = 3x + 4y + 6 \\ 4\sqrt{2y-x+2} + 6\sqrt{y-7x+8} = 3y - 8x + 23 \end{cases}$$

Hướng Dẫn Giải

Đặt $\begin{cases} a = \sqrt{2y-x+2} \\ b = \sqrt{y-7x+8} \end{cases}$ suy ra

$$a^2 + b^2 + 13 = 3y - 8x + 23 = 4a + 6b$$

$$\Leftrightarrow (a-2)^2 + (b-3)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases} \quad (T/M)$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm $(0; 1)$ □

Bài toán 20

Giải hệ phương trình sau
$$\begin{cases} \sqrt{x+2y} - \sqrt{2x-3y} = 1 \\ x^2 + x - 8y + 2 = 2(x-2)\sqrt{2x-3y} \end{cases}$$

Hướng Dẫn Giải

Điều kiện $\begin{cases} x + 2y \geq 0 \\ 2x \geq 3y \end{cases}$

Phương trình đầu tương đương với

$$\sqrt{x+2y} = \sqrt{2x-3y} + 1$$

$$\Leftrightarrow x + 2y = 2x - 3y + 1 + 2\sqrt{2x-3y}$$

$$\Leftrightarrow 5y = x + 1 + 2\sqrt{2x-3y}$$

Thế vào phương trình hai ta được

$$x^2 + x - 3y - (x + 1 + 2\sqrt{2x-3y}) + 2 = 2(x-2)\sqrt{2x-3y}$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 1 = 2(x-1)\sqrt{2x-3y} + 3y$$

$$\Leftrightarrow (x-1 - \sqrt{2x-3y})^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x-1 = \sqrt{2x-3y} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x^2 + 1 = 4x - 3y \end{cases}$$

Do đó hệ phương trình đã cho trở thành
$$\begin{cases} x - 1 = \sqrt{2x - 3y} \\ 5y = x + 1 + 2\sqrt{2x - 3y} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = \sqrt{2x - 3y} \\ 5y = 3x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases} \quad (T/M)$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất (2; 1) □

Bài toán 21

Giải hệ phương trình sau
$$\begin{cases} x\sqrt{x} + y\sqrt{y} = 1 \\ 2x + 5y = \sqrt{(1+x)(2-5y)} \end{cases}$$

Hướng Dẫn Giải

Phương trình thứ hai của hệ đã cho tương đương

$$2(\sqrt{1+x})^2 - (\sqrt{2-5y})^2 = \sqrt{(1+x)(2-5y)} \Rightarrow x = 1 - 5y$$

Thay vào ta có hệ sau
$$\begin{cases} a^3 + b^3 = 1 \\ 5(a^2 - 1) = b^2 \end{cases}$$

Với $\begin{cases} a = \sqrt{1-5y} \\ b = \sqrt{y} \end{cases}$. Từ phương trình thứ hai cho ta thấy hệ có nghiệm khi $a \geq 1$

Phương trình $a^3 - 1 + b^3 = (a - 1)(a^2 + a + 1) + b^3 \geq 0 \quad (a \geq 1)$

Dấu bằng xảy ra tương ứng $y = 0 \Rightarrow x = 1$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm (1; 0)

Bài toán 22

Giải hệ phương trình sau
$$\begin{cases} \sqrt{x + \frac{1}{x+1}} - 1 = \sqrt[3]{\frac{1}{y^3} + \frac{2}{y^2}} \\ \sqrt{x} + \sqrt[4]{y+1} = \sqrt{y} + \sqrt[4]{x+1} \end{cases}$$

Hướng Dẫn Giải

Điều kiện $x, y \geq 0$

Phương trình đầu tương đương với

$$\Leftrightarrow a + \sqrt[4]{b^2 + 1} = b + \sqrt[4]{a^2 + 1} \quad \left(\text{Với } \begin{cases} a = \sqrt{x} \geq 0 \\ b = \sqrt{y} \geq 0 \end{cases} \right)$$

$$\Leftrightarrow a - b = \frac{(a - b)(a + b)}{(\sqrt[4]{a^2 + 1} + \sqrt[4]{b^2 + 1})(\sqrt{a^2 + 1} + \sqrt{b^2 + 1})}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a - b = 0 \Leftrightarrow x = y > 0 \\ (\sqrt[4]{a^2 + 1} + \sqrt[4]{b^2 + 1})(\sqrt{a^2 + 1} + \sqrt{b^2 + 1}) = a + b \quad (*) \end{cases}$$

Ta có $VT(*) > (a + b)(1 + 1) > VP \Rightarrow (*) \quad VN$

Thay vào phương trình hai, ta được

$$\begin{aligned} x^2 &= \sqrt{x+1}\sqrt[3]{2x+1} \\ \Leftrightarrow x(x - \sqrt{x+1}) + \sqrt{x+1}(x - \sqrt[3]{2x+1}) &= 0 \\ \Leftrightarrow x \cdot \frac{x^2 - x - 1}{x + \sqrt{x+1}} + \frac{\sqrt{x+1}(x+1)(x^2 - x - 1)}{x^2 + x\sqrt[3]{2x+1} + (\sqrt[3]{2x+1})^2} &= 0 \\ \Leftrightarrow (x^2 - x - 1) \left[\frac{x}{x + \sqrt{x+1}} + \frac{\sqrt{x+1}(x+1)}{x^2 + x\sqrt[3]{2x+1} + (\sqrt[3]{2x+1})^2} \right] &= 0 \end{aligned}$$

Do biểu thức trong ngoặc vuông luôn dương $\forall x, y \geq 0$ nên suy ra $x^2 - x - 1 = 0$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \Rightarrow y = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

Vậy nghiệm (x, y) của hệ phương trình là $(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \frac{1 + \sqrt{5}}{2})$ □

Bài toán 23

Giải hệ phương trình sau
$$\begin{cases} 2015^{x+y} (x + \sqrt{x^2 + 1}) + 2015xy (y + \sqrt{y^2 + 1}) = 0 \\ 3y^2 + 8\sqrt{x + 2y + 1} + x^2 + 4xy = 4(x + y) + 8\sqrt{y + 1} \end{cases}$$

Hướng Dẫn Giải

Từ phương trình thứ hai của hệ, nhân lượng liên hợp ta có

$$(x + y) \left(x + 3y + \frac{8}{\sqrt{x + 2y + 1} + \sqrt{y + 1}} \right) = 4(x + y)$$

Với $x = -y$ thay lại được phương trình cơ bản

$$\begin{aligned} x + \sqrt{x^2 + 1} - 2015x^2(-x + \sqrt{x^2 + 1}) &= 0 \\ \Leftrightarrow x + \sqrt{x^2 + 1} - \frac{2015x^2}{x + \sqrt{x^2 + 1}} &= 0 \\ \Leftrightarrow (x + \sqrt{x^2 + 1})^2 - 2015x^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow 2x\sqrt{x^2 + 1} - 2013x^2 + 1 &= 0 \end{aligned}$$

....

Với $x + 3y + \frac{8}{\sqrt{x + 2y + 1} + \sqrt{y + 1}} = 4$

Đặt $a = \sqrt{x + 2y + 1}$, $b = \sqrt{y + 1}$, sử dụng đánh giá sau

$$8 = (a^2 + 1) + (b^2 + 1) + \frac{8}{a + b} \geq 2(a + b) + \frac{8}{a + b} \geq 8$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b = 1$. Từ đó giải ra nghiệm □

Bài toán 24

Giải hệ phương trình sau
$$\begin{cases} (y-1)\sqrt{x-1} = \frac{x^2-y}{2} \\ x+y+\sqrt[4]{2x-x^2} = \sqrt{2y-y^2}+2 \end{cases}$$

Hướng Dẫn Giải

Điều kiện: $1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2$

Phương trình thứ nhất của hệ đã cho tương đương

$$(y-1-\sqrt{x-1})^2 = (y-x)(x+y-1)$$

Từ đây chúng ta có: $x \leq y$ là điều kiện để hệ có nghiệm.

Hơn thế nữa, chỉ ra được rằng $1 \leq x, y \leq 2$

Sử dụng phân tích đánh giá cơ bản phương trình thứ hai như sau

$$(x-1) \left[1 - \frac{x-1}{(\sqrt{2x-x^2}+1)(\sqrt[4]{2x-x^2}+1)} + \frac{2y(y-1)}{y+\sqrt{2y-y^2}} \right] = 0$$

Dễ thấy $(\sqrt[4]{2x-x^2}+1)(\sqrt{2x-x^2}+1) - (x-1) > 2-x \geq 0$

Và $y \geq 1$. Do đó $f(x) + g(y) = 0$ khi và chỉ khi $x = y = 1$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $x = y = 1$ □

Bài toán 25

Giải hệ phương trình sau
$$\begin{cases} \sqrt{x-y+1} + \sqrt{3x+2y+6} = 3x+1 \\ x\sqrt{x-2} + \sqrt{x+3y+1} = (y+5)\sqrt{y+1} \end{cases}$$

Hướng Dẫn Giải

Điều kiện:
$$\begin{cases} x-y+1 \geq 0 \\ 3x+2y+6 \geq 0 \\ x \geq 2 \\ y \geq -1 \\ x+3y+1 \geq 0 \end{cases}$$

Phương trình thứ hai tương đương với

$$x(\sqrt{x-2}-\sqrt{y+1}) + \sqrt{y+1}(x-y-3) + \sqrt{x+3y+1} - 2\sqrt{y+1} = 0$$

$$\Leftrightarrow x \cdot \frac{x-y-3}{\sqrt{x-2}+\sqrt{y+1}} + \sqrt{y+1}(x-y-3) + \frac{x-y-3}{\sqrt{x+3y+1}+2\sqrt{y+1}} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-y-3) \left[\frac{x}{\sqrt{x-2}+\sqrt{y+1}} + \sqrt{y+1} + \frac{1}{\sqrt{x+3y+1}+2\sqrt{y+1}} \right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-y-3=0 \\ \frac{x}{\sqrt{x-2}+\sqrt{y+1}} + \sqrt{y+1} + \frac{1}{\sqrt{x+3y+1}+2\sqrt{y+1}} (*) \Rightarrow x=y+3 \text{ Do } VT(*) > 0 \end{cases}$$

Thế vào phương trình đầu ta được

$$2 + \sqrt{2y+6+3(y+3)} = 3(y+3) + 1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{5y + 15} = 3y + 8$$

$$\Leftrightarrow 9y^2 + 43y + 49 = 0 \quad (\text{Vô nghiệm do } y \geq -1)$$

Vậy hệ phương trình đã cho vô nghiệm. □

Bài toán 26

Giải hệ phương trình sau
$$\begin{cases} 3y\sqrt{2+x} + 8\sqrt{2+x} = 10y - 3xy + 12 \\ 5y^3\sqrt{2-x} - 8 = 6y^2 + xy^3\sqrt{2-x} \end{cases}$$

Hướng Dẫn Giải

Điều kiện $x \in$

Phương trình thứ hai tương đương

$$y^3\sqrt{2-x}(5-x) = 6y^2 + 8$$

Từ đó suy ra $y > 0$

Phương trình thứ hai cũng biến đổi thành

$$4y^3(5-x)\left(\sqrt{2-x} - \frac{2}{y}\right) + 2y^2\left(2-x - \frac{4}{y^2}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(2-x - \frac{4}{y^2}\right) \left[\frac{4y^3(5-x)}{\sqrt{2-x} + \frac{2}{y}} + 2y^2 \right] = 0$$

$$\Leftrightarrow 2-x - \frac{4}{y^2} = 0$$

Thế vào phương trình (1) ta có

$$2y^2 + 6y + 6 = (3y + 8)\sqrt{y^2 - 1}$$

Nhường lại cho bạn đọc, chắc không khó với sự hỗ trợ CASIO

Bài toán 27

Giải hệ phương trình sau
$$\begin{cases} \sqrt{x + \frac{1}{x+1}} - 1 = \sqrt[3]{\frac{1}{y^3} + \frac{2}{y^2}} \\ \sqrt{x} + \sqrt[4]{y+1} = \sqrt{y} + \sqrt[4]{x+1} \end{cases}$$

Hướng Dẫn Giải

Điều kiện $x \geq 0, y > 0$. Phương trình thứ hai của hệ tương đương với

$$\sqrt{x} - \sqrt[4]{x+1} = \sqrt{y} - \sqrt[4]{y+1} \quad (*)$$

Xét hàm số $f(t) = \sqrt{t} - \sqrt[4]{t+1}$ trên $[0; +\infty)$ ta có

$$f'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}} - \frac{1}{4\sqrt[4]{(t+1)^3}} = 0 \Leftrightarrow 2\sqrt[4]{(t+1)^3} = \sqrt{t}$$

$$\Leftrightarrow 16(t+1)^3 = t^2 \Leftrightarrow 16t^3 + 47t^2 + 48t + 16 = 0$$

Vô nghiệm do $t > 0$, mà $f'(t)$ liên tục trên $(0; +\infty)$

Suy ra $f'(t)$ không đổi dấu trên $(0; +\infty)$

Suy ra $f(t)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$

Mặt khác (*) $\Leftrightarrow f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y$

Do $x \geq 0$ và $y > 0 \Rightarrow x > 0$

Thế vào phương trình thứ nhất ta được

$$\begin{aligned} \sqrt{x + \frac{1}{x+1}} - 1 &= \sqrt[3]{\frac{1}{y^3} + \frac{2}{y^2}} \\ \Leftrightarrow \sqrt{\frac{x^2}{x+1}} &= \sqrt[3]{\frac{1}{x^3} + \frac{2}{x^2}} \Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{x+1}} = \frac{\sqrt[3]{2x+1}}{x} \\ \Leftrightarrow \left(\frac{x}{\sqrt{x+1}} - 1\right) + \left(1 - \frac{\sqrt[3]{2x+1}}{x}\right) &= 0 \Leftrightarrow \frac{x - \sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}} + \frac{x - \sqrt[3]{2x+1}}{x} = 0 \\ \Leftrightarrow \frac{x^2 - x - 1}{(x + \sqrt{x+1})\sqrt{x+1}} + \frac{x^3 - 2x - 1}{x \left[x^2 + x\sqrt[3]{2x+1} + \sqrt[3]{(2x+1)^2} \right]} &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{x^2 - x - 1}{(x + \sqrt{x+1})\sqrt{x+1}} + \frac{(x+1)(x^2 - x - 1)}{x \left[x^2 + x\sqrt[3]{2x+1} + \sqrt[3]{(2x+1)^2} \right]} &= 0 \\ \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

Nghiệm có hệ duy nhất $(x; y) = \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}; \frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)$. □

Bài toán 28

Giải hệ phương trình sau $\begin{cases} x - \sqrt{x} = y - \sqrt{y} \\ (x - y)^2 + y + 3 = 2\sqrt{4x - 2y} \end{cases}$

Hướng Dẫn Giải

Phương trình đầu tương đương với

$$(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y} - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 1 \end{cases}$$

- Với $x = y$ thì thay vào phương trình hai ta được nó vô nghiệm
- Với $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$

Ta xét phương trình hai, sử dụng bất đẳng thức AM-GM ta có

$$(x - y)^2 + y + 3 = 2\sqrt{4x - 2y} \leq \frac{4x - 2y + 4}{2} = 2x - y + 2$$

$$\Leftrightarrow (x - y - 1)^2 \leq 0 \Leftrightarrow x - 1 = y$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = y \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases} \quad (T/M)$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$ □

Bài toán 29

Giải hệ phương trình sau $\begin{cases} x^2 + 6xy + 4y^2 + 1 = 2x + 4y + 2\sqrt{2xy} \\ \frac{2xy + 10\sqrt{2x^4 + 32y^4}}{x^3y + 4xy^3} = 21 \end{cases}$

Hướng Dẫn Giải

Điều kiện $xy > 0$

Phương trình thứ nhất tương đương với

$$2(x + 2y) = (\sqrt{2xy} - 1)^2 + (x + 2y)^2 \geq (x + 2y)^2$$

$$\Leftrightarrow 0 < x + 2y \leq 2$$

Phương trình thứ hai tương đương

$$21xy(x + 2y)^2 - 84x^2y^2 = 2xy + 10\sqrt{2(x^4 + 16y^4)} \geq 2xy + 5(x + 2y)^2$$

$$\Leftrightarrow (21xy - 5)(x + 2y)^2 \geq 84x^2y^2 + 2xy$$

$$\Leftrightarrow (x + 2y)^2 \geq \frac{84x^2y^2 + 2xy}{21xy - 5}$$

Ta có $2 \geq x + 2y \geq 2\sqrt{2xy}$ suy ra $0 < xy \leq \frac{1}{2}$

Xét $f(xy) = \frac{84x^2y^2 + 2xy}{21xy - 5}$ trên $(0; \frac{1}{2}]$

Ta có

$$(x + 2y)^2 \geq \max f(xy) = f\left(\frac{1}{2}\right) = 4 \Leftrightarrow x + 2y \geq 2$$

Từ đó suy ra $\begin{cases} x = 2y \\ 2xy = 1 \\ x + 2y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = \frac{1}{2} \end{cases} \quad (T/M)$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\begin{cases} x = 1 \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}$ □

Bài toán 30

Giải hệ phương trình sau $\begin{cases} x - y = \sqrt{y} + 3 \\ (x - y)^2 + 4(y + 1) = 24(\sqrt{2x - y} - 2) \end{cases}$

Hướng Dẫn Giải

Điều kiện $y \geq 0$

Từ phương trình đầu suy ra $x > 0$

Thế $x = y + \sqrt{y} + 3$ vào phương trình hai, ta có

$$(\sqrt{y} + 3)^2 + 4y + 4 + 48 = 24\sqrt{y + 2\sqrt{y} + 6}$$

$$\Leftrightarrow 5y + 6\sqrt{y} + 61 = 24\sqrt{y + 2\sqrt{y} + 6}$$

Theo bất đẳng thức AM-GM ta có

$$VP = 4.2.3\sqrt{y + 2\sqrt{y} + 6} \leq 4(y + \sqrt{2} + 15) = 4y + 8\sqrt{y} + 61$$

$$\Rightarrow 5y + 6\sqrt{y} + 61 \leq 4y + 8\sqrt{y} + 61$$

$$\Leftrightarrow y - 2\sqrt{y} + 1 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{y} - 1)^2 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow y = 1 \Rightarrow x = 5$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất (5, 1) □

Bài toán 31

Giải hệ phương trình sau
$$\begin{cases} (7x + 5)\sqrt{x} = 12\sqrt{2x^2 - xy} \\ 4y - 5x + 1 = 4\sqrt{(x - y)(2x - y)} \end{cases}$$

Hướng Dẫn Giải

Điều kiện $\begin{cases} x \geq 0 \\ x \geq y \end{cases}$

Phương trình thứ nhất tương đương

$$\sqrt{x}(7x + 5 - 12\sqrt{2x - y}) = 0$$

Với trường hợp $x = 0$ ta giải được $\begin{cases} x = 0 \\ y = -\frac{1}{8} \end{cases}$

Với trường hợp $7x + 5 - 12\sqrt{2x - y} = 0$

Đặt $\begin{cases} a = \sqrt{2x - y} \\ b = \sqrt{x - y} \end{cases}$ ta có hệ
$$\begin{cases} 7x + 5 = 12a \\ 4y - 5x + 1 = 4ab \\ 2x - y = a^2 \\ x - y = b^2 \end{cases}$$

Thế x, y rồi giải theo 2 ẩn a, b ta sẽ có các nghiệm là $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$; $\begin{cases} x = 0 \\ y = -\frac{1}{8} \end{cases}$ và $\begin{cases} x = \frac{4\sqrt{22} - 3}{63} \\ y = \frac{8\sqrt{22} - 20}{63} \end{cases}$

Vậy hệ phương trình có 3 nghiệm $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$; $\begin{cases} x = 0 \\ y = -\frac{1}{8} \end{cases}$ và $\begin{cases} x = \frac{4\sqrt{22} - 3}{63} \\ y = \frac{8\sqrt{22} - 20}{63} \end{cases}$ □

Bài toán 32

Giải hệ phương trình sau
$$\begin{cases} x - y = 6(1 - \sqrt{xy}) \\ x + \frac{6\sqrt{2(x^6 + y^6)}}{x^2 + xy + y^2} = 3 + \sqrt{2(x^2 + y^2)} \end{cases}$$

Hướng Dẫn Giải

Ta có đánh giá cho phương trình hai

$$3 - x + \sqrt{2(x^2 + y^2)} = \frac{6\sqrt{2(x^2 + y^2)(x^4 - x^2y^2 + y^4)}}{x^2 + xy + y^2} \geq 2\sqrt{2(x^2 + y^2)}$$

$$\Rightarrow 3 - x \geq \sqrt{2(x^2 + y^2)}$$

Từ phương trình đầu ta cũng có

$$x - y = 6 - 6\sqrt{xy} \geq 6 - 3(x + y) \Rightarrow 2x + y \geq 3$$

$$\Rightarrow x + y \geq \sqrt{2(x^2 + y^2)} \Leftrightarrow x = y \Rightarrow x = y = 1 \quad (T/M)$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất (1; 1) □

Bài toán 33

Giải hệ phương trình sau
$$\begin{cases} (x + y + 3)\sqrt{x - y} + 2y + 4 = 0 \\ (x - y)(x^2 + 4) = y^2 + 1 \end{cases}$$

Hướng Dẫn Giải

Đặt $\begin{cases} a = x + y \\ b = \sqrt{x - y} \end{cases} \Rightarrow a - b^2 = 2y$ do đó phương trình một trở thành

$$(a + 3)b + a - b^2 + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow a(b + 1) = b^2 - 3b - 4 \Leftrightarrow a(b + 1) = (b - 4)(b + 1)$$

Vì $b \geq 0$ nên từ điều trên ta có : $a = b - 4 \Leftrightarrow x + y = \sqrt{x - y} - 4$.

Thế $4 = \sqrt{x - y} - (x + y)$ xuống phương trình hai ta được :

$$(x - y)(\sqrt{x - y} - x - y + x^2) = y^2 + 1$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x - y})^3 - 1 + x^2(x - y) - (x^2 - y^2) = y^2$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x - y})^3 - 1 + x^2(x - y - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x - y - 1 = 0$$

Vậy hệ phương trình đã cho trở thành
$$\begin{cases} x + y = \sqrt{x - y} - 4 \\ x = y + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -2 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm (-1; -2) □

Bài toán 34

Giải hệ phương trình sau
$$\begin{cases} (x^2 + y^2 - 7)(x + y)^2 + 2 = 0 \\ (x - 3)(x + y) = 1 \end{cases}$$

Hướng Dẫn Giải

Nhận thấy $x + y = 0$ không là nghiệm của hệ phương trình nên

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + \frac{2}{(x+y)^2} = 7 \\ x - \frac{1}{x+y} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 + 2y^2 + \frac{4}{(x+y)^2} = 14 \\ 2x - \frac{2}{x+y} = 6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2 + \frac{4}{(x+y)^2} + (x-y)^2 = 14 \\ x+y + \frac{2}{x+y} + (x-y) = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = 18 \\ a + b = 6 \end{cases}$$

Với $\begin{cases} a = x + y + \frac{2}{x+y} \\ b = x - y \end{cases} \Rightarrow a = b = 3$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 3 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm $(\frac{5}{2}; -\frac{1}{2})$, $(2; -1)$ □

Bài toán 35

Giải hệ phương trình sau $\begin{cases} x^2 + y^2 + \frac{2xy}{x+y} = 1 \\ \sqrt{x+y} = x^2 - y \end{cases}$

Hướng Dẫn Giải

Điều kiện $x + y > 0$

Phương trình đầu tương đương với

$$(x+y)^2 - 1 + \frac{2xy(1-x-y)}{x+y} = 0$$

$$\Leftrightarrow (1-x-y) \left(\frac{2xy}{x+y} - (x+y+1) \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y = 1 \\ x^2 + y^2 + 1 = 0 \text{ (vô nghiệm)} \end{cases}$$

Kết hợp phương trình hai ta có $\begin{cases} x+y = 1 \\ \sqrt{x+y} = x^2 - y \end{cases}$

$$\Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \Rightarrow y = 0 \text{ (T.M)} \\ x = -2 \Rightarrow y = 3 \text{ (T.m)} \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(1; 0)$ và $(-2; 3)$ □

Bài toán 36

Giải hệ phương trình sau
$$\begin{cases} 6x - 5y + 4\sqrt{(x-y)(2x-y)} = 11 + 4\sqrt{6} \\ \sqrt{y+1} [2y + 3 + 4(\sqrt{x-y} + \sqrt{2x-y})] = 0 \end{cases}$$

Hướng Dẫn Giải

Điều kiện $y \geq -1, x \geq y$

Phương trình hai tương đương $y = -1$ do $2y + 3 + 4\sqrt{x-y} + \sqrt{2x-y} > 0 \quad \forall y \geq -1$

Thế vào phương trình đầu ta có phương trình

$$6x + 5 + 4\sqrt{(x+1)(2x+1)} = 11 + 4\sqrt{6}$$

$$\Leftrightarrow (x-1) \left[6 + 4 \frac{2x-5}{\sqrt{(x+1)(2x+1)} + \sqrt{6}} \right] = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 1$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(1; -1)$

Bài toán 37

Giải hệ phương trình sau
$$\begin{cases} 4x^2 + 4xy + y^2 + 2x + y = 2 \\ 8\sqrt{1-2x} + y^2 - 9 = 0 \end{cases}$$

Hướng Dẫn Giải

Phương trình đầu tương đương
$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 2x + y = -2 \end{cases}$$

Với $2x + y = 1$ thì phương trình (2) tương đương $8\sqrt{y} + y^2 - 9 = 0$

Xét hàm số $f(y) = 8\sqrt{y} + y^2 - 9 = 0$ với $y \geq 0$ ta có $f(y)$ đồng biến

Với $y \geq 0$ và $f(1) = 0$ nên $y = 1$ là nghiệm, suy ra $x = 0$

Vậy hệ có nghiệm $(0; 1)$

Với $2x + y = -2$ thế vào phương trình (2) ta có $8\sqrt{y+3} + y^2 - 9 = 0$ tương tự và ta sẽ có nghiệm $(\frac{1}{2}; -3)$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm $(\frac{1}{2}; -3)$ và $(0; 1)$ □

Bài toán 38

Giải hệ phương trình sau
$$\begin{cases} \sqrt{4x-3} = (2y^2 + 11)(17-y) + \sqrt{y} \\ y(y-3x+3) = 15x+10 \end{cases}$$

Hướng Dẫn Giải

Điều kiện $x \geq \frac{3}{4}, y \geq 0$

Phương trình thứ hai tương đương với $(y+5)(y-3x-2) = 0 \Leftrightarrow y = 3x+2$

Thế vào phương trình thứ nhất ta có

$$\sqrt{\frac{4x-17}{3}} = (2y^2 + 11)(17-y) + \sqrt{y}$$

$$\Leftrightarrow (y - 17) \left[\frac{1}{\sqrt{\frac{4y - 17}{3}} + \sqrt{y}} + 2y^2 + 11 \right] = 0$$

Từ đó hệ có nghiệm $\begin{cases} x = 5 \\ y = 17 \end{cases}$ □

Bài toán 39

Giải hệ phương trình sau $\begin{cases} (x + 5)(x^2 + 5x + 9) = (2y + 1)(3 - y) \\ \sqrt{x + 3} + \sqrt[3]{30 - 2y} = 4(y - 1) + \sqrt{2y - 2} \end{cases}$

Hướng Dẫn Giải

Điều kiện $x \geq -3, y \geq 1$

Với $y \leq \frac{3}{2} \Rightarrow VT(2) \geq \sqrt[3]{27} = 3$

Mà

$$VP(2) \leq 4\left(\frac{3}{2} - 1\right) + \sqrt{2\frac{3}{2} - 2} = 3$$

Dấu bằng xảy ra khi $y = \frac{3}{2} \Rightarrow x = -3$

Với $y > \frac{3}{2}$ ta có

$$\begin{aligned} \sqrt{x + 3} + \sqrt[3]{30 - 2y} &= 4(y - 1) + \sqrt{2y - 2} > 3 \\ \Rightarrow \sqrt{x + 3} > 0 &\Leftrightarrow x > -3 \end{aligned}$$

Ta sẽ CM : $VT(1) > 6$

$$\Leftrightarrow x^3 + 10x^2 + 34x + 39 > 0 \Leftrightarrow (x + 3)(x^2 + 7x + 13) > 0 \text{ (luôn đúng)}$$

Do đó

$$VP(1) > 6 \Rightarrow (2y - 1)(3 - y) > 6 \Leftrightarrow 1 < y < \frac{3}{2}$$

Mà $y > \frac{3}{2}$ nên phương trình vô nghiệm

Vậy hệ phương trình chỉ có nghiệm $(x, y) = (-3; \frac{3}{2})$ □

Bài toán 40

Giải hệ phương trình sau $\begin{cases} y^3 = 2(\sqrt{2x^3} + \sqrt{2x} - y) \\ y(y - x - 2) = 3 - 3x \end{cases}$

Hướng Dẫn Giải

Điều kiện $x \geq 0$

Phương trình đầu tương đương với

$$y^3 + 2y = (\sqrt{2x})^3 + 2(\sqrt{2x})$$

$$\Leftrightarrow y = \sqrt{2x}$$

Thế vào phương trình (2) ta có $(y - 3)(y - x + 1) = 0$

Với $y = 3$ suy ra $x = \frac{9}{2}$

Với $y = x - 1$ suy ra $x - 1 = \sqrt{2x} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x^2 - 4x + 1 = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow x = 2 + \sqrt{3} \Rightarrow y = 1 + \sqrt{3}$$

Vậy hệ phương trình có 2 nghiệm $\begin{cases} x = \frac{9}{2} \\ y = 3 \end{cases} ; \begin{cases} x = 2 + \sqrt{3} \\ y = 1 + \sqrt{3} \end{cases}$ □

Bài toán 41

Giải hệ phương trình sau $\begin{cases} \frac{xy - 1}{1 + xy} - \frac{1}{1 + y^2} = \frac{x^2}{1 + x^2} \\ \sqrt{x - 1}\sqrt{y - 1}\sqrt{x^2 + x + 1} + (x + 1)\sqrt{x^2 - x + 1} = 2x^2 - x + y \end{cases}$

Hướng Dẫn Giải

Điều kiện $x \geq 1; y \geq 1$

Từ phương trình đầu ta có

$$\frac{xy - 1}{xy + 1} = \frac{x^2y^2 - 1}{(1 + y^2)(1 + x^2)} = \frac{x^2y^2 - 1}{1 + x^2 + y^2 + x^2y^2} \leq \frac{(xy - 1)(xy + 1)}{(xy + 1)^2} = \frac{xy - 1}{xy + 1}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $x = y$. Thay vào phương trình hai ta có

$$(x - 1)\sqrt{x^2 + x + 1} + (x + 1)\sqrt{x^2 - x + 1} = 2x^2$$

$$\Leftrightarrow (x + 1)\sqrt{x^2 - x + 1} - (x^2 + 1) = (x^2 - 1) - (x - 1)\sqrt{x^2 + x + 1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x(x - 1)^2}{(x + 1)\sqrt{x^2 - x + 1} + x^2 + 1} = (x - 1) \frac{x}{(x + 1) + \sqrt{x^2 + x + 1}}$$

Trường hợp 1. Với $x(x - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \ (x \geq 1)$

Trường hợp 2. Với $x^2 + 1 + (x + 1)\sqrt{x^2 - x + 1} = x^2 - 1 + (x - 1)\sqrt{x^2 + x + 1}$

$$\Leftrightarrow (x + 1)\sqrt{x^2 - x + 1} + 2 = (x - 1)\sqrt{x^2 + x + 1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x^3 + 2x}{(x + 1)\sqrt{x^2 - x + 1} + (x - 1)\sqrt{x^2 + x + 1}} + 2 = 0 > 0$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình $(x; y) = (1; 1)$ □

Bài toán 42

Giải hệ phương trình sau $\begin{cases} x + \sqrt{x + y} - 2y = y^2 + 2 \\ \sqrt[4]{x + \sqrt{x + y} - 1} = 2 - 2y - x \end{cases}$

Hướng Dẫn Giải

Đặt $\begin{cases} \sqrt{x + y} = a \\ y + 1 = b \end{cases}$ hệ phương trình tương đương với $\begin{cases} a^2 + a = b^2 + b \\ \sqrt[4]{a^2 - b + a} = 3 - a^2 - b \end{cases}$

Phương trình đầu tương đương

$$(a - b)(a + b + 1) = 0 \Leftrightarrow a = b$$

Thế vào phương trình hai ta có $\sqrt{a} = 3 - a^2 - a$

$$\Leftrightarrow (a - 1) \left(a + 1 + 1 + \frac{1}{\sqrt{a} + 1} \right) = 0 \Leftrightarrow a = 1 \quad (a \geq 0)$$

Vậy $a = 1 \Rightarrow b = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$ □

Bài toán 43

Giải hệ phương trình sau
$$\begin{cases} \sqrt[4]{2x^2 - x^3} = 9 + 4y^2 - 12y \\ \sqrt[4]{x}(2y^2 + \sqrt{2-x}) = 4y^4 + x - 2 \end{cases}$$

Hướng Dẫn Giải

Điều kiện $0 \leq x \leq 2$

Từ phương trình (1) ta có

$$\sqrt[4]{x}(2y^2 + \sqrt{2-x}) = 4y^4 - (2-x) = (2y^2 + \sqrt{2-x})(2y^2 - \sqrt{2-x})$$

• TH1: $2y^2 + \sqrt{2-x} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases}$

Thay vào phương trình (1) không thỏa mãn

• TH2: $\sqrt[4]{x} + \sqrt{2-x} = 2y^2$ (3)

Lấy (1) + (3) ta được

$$\sqrt[4]{2x^2 - x^3} + \sqrt[4]{x} + \sqrt{2-x} = 6y^2 - 12y + 9 \quad (*)$$

Áp dụng BĐT AM-GM ta có

$$VT(*) \leq \frac{3+x}{4} + \frac{3+x}{4} + \frac{3-x}{2} = 3$$

Ta cần chứng minh

$$VP(*) \geq 3 \Leftrightarrow 6(y-1)^2 \geq 0 \quad (\text{luôn đúng})$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $x = y = 1$

Vậy nghiệm của hệ phương trình $(x, y) = (1; 1)$ □

Bài toán 44

Giải hệ phương trình sau
$$\begin{cases} 2x^2 + \sqrt{2-x} + \sqrt{y-1} - 34 = 2xy + x \\ 2y^2 + \sqrt{2-x} + \sqrt{y-1} - 34 = -xy + 2y \end{cases}$$

Hướng Dẫn Giải

Điều kiện của hệ phương trình $x \leq 2, y \geq 1$

Trừ vế theo vế 2 phương trình ta được

$$2x^2 - (3y + 1)x - (2y^2 - 2y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y \\ y = 1 - 2x \end{cases}$$

- Với $x = 2y$ thay vào phương trình thứ hai của hệ ta được

$$2y^2 + \sqrt{2 - 2y} + \sqrt{y - 1} = 2y - 2y^2$$

Suy ra $y = 1$ (không thỏa mãn)

- Với $y = 2x - 1$ thay vào phương trình đầu tiên của hệ ta được

$$6x^2 - 3x - 30 + (\sqrt{2 - x} - 2) + (\sqrt{-2x} - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x + 2) \left(3x - 5 - \frac{2}{\sqrt{2 - x} + 2} - \frac{2}{\sqrt{-2x} + 2} \right) = 0$$

Với điều kiện của phương trình: $x \leq 0$ ta chỉ được nghiệm $x = -2$.

Vậy hệ ban đầu có nghiệm $(x; y) = (-2; -5)$ □

Bài toán 45

Giải hệ phương trình sau
$$\begin{cases} 3x(\sqrt{x - 3} - y\sqrt{y}) + \sqrt{3x - 3y^3} + \sqrt{x + y - 5} = 3 \\ 3y^3 - 3y + 8 = 2x \end{cases}$$

Hướng Dẫn Giải

Điều kiện:
$$\begin{cases} x \geq 3 \\ y \geq 0 \\ x - y^3 \geq 0 \\ x + y - 5 \geq 0 \end{cases}$$

Phương trình đầu tương đương với

$$3x \frac{y^3 + 3 - x}{y\sqrt{y} + \sqrt{x - 3}} + 3 \frac{y^3 + 3 - x}{\sqrt{3x - 3y^3} + 3} = \sqrt{x + y - 5} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow y^3 + 3 - x \geq 0$$

Ta có $3y^3 - 3y + 8 = 2x \leq 2(y^3 + 3)$

$$\Leftrightarrow (y - 1)^2(y + 2) \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = y^3 + 3 \\ x + y - 5 = 0 \end{cases}$$

Suy ra $\begin{cases} x = 4 \\ y = 1 \end{cases}$ (thỏa mãn điều kiện)

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $(4; 1)$ □

Bài toán 46

Giải hệ phương trình sau
$$\begin{cases} 2y - 3x + \sqrt{y(x-2)} = 4(\sqrt{x-2} - \sqrt{y}) - 6 \\ \sqrt{y} + 2\sqrt{y(xy-x+5)} = 2(y+2) - \sqrt{5x+6} \end{cases}$$

Hướng Dẫn Giải

Xét phương trình (1) đặt $\begin{cases} a = \sqrt{x-2} \\ b = \sqrt{y} \end{cases}$

Khi đó ta có phương trình tương đương

$$2b^2 - 3a^2 + ab = 4(a-b) \Leftrightarrow (b-a)(2b+3a+4) = 0$$

$$\Leftrightarrow a = b \Leftrightarrow y = x - 2$$

Thế vào phương trình (2) ta được phương trình

$$\sqrt{x-2} + 2\sqrt{(x-2)(x^2-3x+5)} = 2x - \sqrt{5x+6}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x-2} \left(1 + 2\sqrt{x^2-3x+5} - 2\sqrt{x-2} + \frac{5\sqrt{x-2}}{\sqrt{5x+6}+4} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x-2} \left(1 + \frac{2(x^2-4x+4+3)}{\sqrt{x^2-3x+5}+\sqrt{x-2}} + \frac{5\sqrt{x-2}}{\sqrt{5x+6}+4} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 2 \Rightarrow y = 0 \quad (T/M)$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm (2; 0) □

Bài toán 47

Giải hệ phương trình sau
$$\begin{cases} x^2(y^2+1+\sqrt{x}) - (\sqrt{x}+1)(y-2) = y^3-2y^2 \\ y\sqrt{x^2-x+1} = x^3-3x-3+2y \end{cases}$$

Hướng Dẫn Giải

Từ phương trình đầu đưa về

$$(1 + \sqrt{x} + y^2)(x^2 - y + 2) = 0 \Leftrightarrow y = x^2 + 2$$

Thay vào phương trình 2 ta có

$$(x^2 + 2)\sqrt{x^2 - x + 1} = x^3 + 2x^2 - 3x + 1$$

$$\Leftrightarrow x(x^2 - x + 1) - (x^2 + 2)\sqrt{x^2 - x + 1} + 3x^2 - 4x + 1 = 0$$

Xem là phương trình bậc 2 với ẩn $t = \sqrt{x^2 - x + 1}$ ta có

$$\Delta = (x^2 + 2)^2 - 4x(3x^2 - 4x + 1) = (x^2 - 4x)^2$$

....

Bài toán 48

Giải hệ phương trình sau
$$\begin{cases} \sqrt{3x^2 + 6xy + 4y^2 + 2y + 1} = 3x + 2y - 1 \\ 4\sqrt{x + y + 2} + 4y\sqrt{2(y + 1)} = 5y^2 + 6x + 3 + \sqrt{2(y^2 + x)} \end{cases}$$

Hướng Dẫn Giải

Xét phương trình đầu

Xét $y + 1 = 0$ (loại)

Xét $y + 1 > 0$ phương trình tương đương với

$$\sqrt{3\frac{(x+y)^2}{(y+1)^2} + 1} = 3\frac{x+y}{y+1} - 1$$

Suy ra $x + y = y + 1 \Leftrightarrow x = 1$ thế vào phương trình hai ta có

$$4\sqrt{y+3} + 4y\sqrt{2y+2} = 5y^2 + 9 + \sqrt{2(y^2+1)}$$

$$\Leftrightarrow (y-1)^2 \left[3 + \frac{1}{\sqrt{2(y^2+1)} + y + 1} + \frac{2y}{2\sqrt{2y+2} + y + 3} + \frac{1}{4\sqrt{y+3}} \right] = 0$$

Ta chứng minh $5y^2 + 9 > 4\sqrt{y+3}$

$$\Leftrightarrow 25y^4 + 86y^2 + 4(y-2)^2 + 17 > 0 \quad (\text{Đúng})$$

suy ra $y > 0$

Vậy $x = y = 1$ là nghiệm duy nhất của hệ □

Bài toán 49

Giải hệ phương trình sau
$$\begin{cases} y^4 - 2xy^2 + 7y^2 = -x^2 + 7x + 8 \\ \sqrt{3-x} + \sqrt{y^2+1} = x^3 + x^2 - 4y^2 + 3 \end{cases}$$

Hướng Dẫn Giải

Điều kiện $x \leq 3$

Phương trình đầu tương đương với

$$(y^2 - x + 8)(y^2 - x - 1) = 0 \Leftrightarrow y^2 = x + 1 \quad (\forall x \leq 3)$$

Thế vào (2) ta được

$$\sqrt{3-x} + \sqrt{x+2} = x^3 + x^2 - 4x - 1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3-x} + \sqrt{x+2} - 3 = (x+2)(x^2 - x - 2)$$

$$\Leftrightarrow 4(u-3) = (x+2)(3-u)(u+3)(u^2+1) \quad \text{Với } \sqrt{5} \leq (u = \sqrt{3-x} + \sqrt{x+2} \geq \sqrt{10})$$

$$\Leftrightarrow (u-3)[4 + (x+2)(u+3)(u^2+1)] = 0 \Leftrightarrow u = 3$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3-x} + \sqrt{x+2} = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$$

Với $x = -1$ suy ra $y = 0$

Với $x = 2$ suy ra $y = \pm\sqrt{3}$

Vậy hệ có ba nghiệm : $(-1; 0), (2; \sqrt{3})$ và $(2; -\sqrt{3})$ □

Phần III. Bài Tập Đề Nghị

Bài Toán 1 . Giải hệ phương trình sau
$$\begin{cases} x(x^2 - x + 1) = (y + 2)\sqrt{y + 1} \\ x(x^2 + x + 1) = \sqrt{(y + 1)(y + 2)} \end{cases}$$

Bài Toán 2 . Giải hệ phương trình sau
$$\begin{cases} x^2 - y = 3\sqrt[3]{y - 1}\sqrt[6]{x - 1} \\ y^2 - x = 3\sqrt[3]{x - 1}\sqrt[6]{y - 1} \end{cases}$$

Bài Toán 3 . Giải hệ phương trình sau
$$\begin{cases} x^2 + 2(y + 1)\sqrt{x - 1} + y = 0 \\ y + \sqrt{x^2 - x} + 2 = x + \sqrt{y^2 + y} \end{cases}$$

Bài Toán 4 . Giải hệ phương trình sau
$$\begin{cases} x + \sqrt{x - y + 1} + \sqrt{x^2 + 4y^3} + y = 2y^2 + 1 \\ \sqrt{1 - y}(\sqrt{1 + 4x} + 2\sqrt{y^2 + 1} + 1) = \sqrt{y}(y + \sqrt{x + y + 1}) \end{cases}$$

Bài Toán 5 . Giải hệ phương trình sau
$$\begin{cases} x^2y^2 + (x - y + 1)(1 + xy) = 0 \\ x^2 + y^2(1 + 2x) + 2y = 4(1 + x) \end{cases}$$

Bài Toán 6 . Giải hệ phương trình sau
$$\begin{cases} x^2y^2 + (x - y + 1)(1 + xy) = 0 \\ x^2 + y^2(1 + 2x) + 2y = 4(1 + x) \end{cases}$$

Bài Toán 7 . Giải hệ phương trình sau
$$\begin{cases} 2(x^2 + y^2 + xy) = 3(x - y + 13) \\ \sqrt{x - 1} + \sqrt[4]{6 - 5y} = \sqrt{y - 1} + \sqrt[4]{x + 6} \end{cases}$$

Bài Toán 8 . Giải hệ phương trình sau
$$\begin{cases} x(x^2 + x + 1) = y\sqrt{y^2 + 1} \\ 2y^2 + 4y + 1 = (2x + 1)\sqrt{4x + 1} \end{cases}$$

Bài Toán 9 . Giải hệ phương trình sau
$$\begin{cases} \sqrt{x - y + 1} + \sqrt{3x + 2y + 6} = 3x + 1 \\ x\sqrt{x - 2} + \sqrt{x + 3y + 1} = (y + 5)\sqrt{y + 1} \end{cases}$$

Bài Toán 10 . Giải hệ phương trình sau
$$\begin{cases} x^3 + 3(x + y) = 7y^3 \\ xy(x + y) = \sqrt[3]{x^3 + y^3 + 6y^2x} \end{cases}$$

Bài Toán 11 . Giải hệ phương trình sau
$$\begin{cases} x^2 + 6 = 2(x + y) + 5\sqrt{2y - 5x} \\ y^2 + 7y + 6x + 21 = (18 - 2y)\sqrt{5y - 2x} \end{cases}$$

Bài Toán 12 . Giải hệ phương trình sau
$$\begin{cases} x + 10\sqrt{6y - 5x} + 11 = y + 12\sqrt{3y - 4x} \\ 2y + \sqrt{30y - 9x} + x = 2\sqrt{y - x} + \sqrt{6y - 3x} \end{cases}$$

Bài Toán 13 . Giải hệ phương trình sau
$$\begin{cases} \sqrt{2x} + \sqrt{6y^2 + 1} = 3y + \sqrt[4]{x^2 + 1} \\ x^2 + x\sqrt{y^2 + 1} + (3xy - 1)\sqrt{y - x} = 1 \end{cases}$$

Bài Toán 14 . Giải hệ phương trình sau
$$\begin{cases} 2(x + y) = (x + y - 1)\sqrt{xy} \\ \frac{x}{y} + \sqrt{\frac{y}{x}} + \sqrt{\frac{x}{y}} + \frac{2}{x + y + 1} = \frac{10}{3} \end{cases}$$

Bài Toán 15 . Giải hệ phương trình sau
$$\begin{cases} x^3 = y^2 + (x + 2y + 2)\sqrt{x + 1} + 1 \\ x + \sqrt{x + y} = y + \sqrt{x + 1} + \sqrt{1 - y} \end{cases}$$

Bài Toán 16 . Giải hệ phương trình sau
$$\begin{cases} \frac{7}{2} + \frac{3y}{x + y} = \sqrt{x} + 4\sqrt{y} \\ (x^2 + y^2)(x + 1) = 4 + 2xy(x - 1) \end{cases}$$

Bài Toán 17 . Giải hệ phương trình sau
$$\begin{cases} x\sqrt{1 + \sqrt{1 + y}} = |x - y| \\ y\sqrt{1 - \sqrt{1 - x}} = |y - x| \end{cases}$$

Bài Toán 18 . Giải hệ phương trình sau
$$\begin{cases} (x + \sqrt{x^2 + 1})(y + \sqrt{y^2 + 1}) = 3 - x^2 - y^2 \\ (x + y)(x^2 + y^2 - 1) = 2(x + y + 1)\sqrt{x^2 + y^2 - 2} \end{cases}$$

Bài Toán 19 . Giải hệ phương trình sau
$$\begin{cases} \sqrt{x + \frac{1}{x + 1}} - 1 = \sqrt[3]{\frac{1}{y^3} + \frac{2}{y^2}} \\ \sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y + 1} = \sqrt{y} + \sqrt[8]{x + 1} \end{cases}$$

Bài Toán 20 . Giải hệ phương trình sau
$$\begin{cases} x\sqrt{x} + y\sqrt{y} = 1 \\ 2x + 5y = \sqrt{(1 + x)(2 - 5y)} \end{cases}$$

Bài Toán 21 . Giải hệ phương trình sau
$$\begin{cases} \sqrt[3]{\frac{x^3 + x^2 + x}{3}} = \sqrt[4]{\frac{y^{-4} + y^{-3} + y^{-2} + y^{-1}}{4}} \\ x^2 + y^2 = 2xy + \sqrt{(x - 1)(y - 1)} \end{cases}$$

Bài Toán 22 . Giải hệ phương trình sau
$$\begin{cases} x(xy + 1)\sqrt[3]{x^3y^3 + 1} = \sqrt[3]{2}(y^2 + xy)\sqrt{xy} \\ x^2 + 9\sqrt{x^2 + 3x - xy} + y = 9\sqrt{x^2 + \frac{1}{y} + xy} \end{cases}$$

Bài Toán 23 . Giải hệ phương trình sau
$$\begin{cases} x^2y^2 + 4xy(x + y) = (x + y)^3 + xy \\ 2(x\sqrt{x - 2y} + y\sqrt{y - 2x} + xy) = 3(x + y) + 4 \end{cases}$$

Bài Toán 24 . Giải hệ phương trình sau
$$\begin{cases} (x^3 - 3x^2 + 3x)\sqrt{\frac{x}{y}} = \sqrt[3]{x^3 - y^3 + 1} \\ (y^3 - 3y^2 + 3y)\sqrt{\frac{y}{x}} = \sqrt[3]{y^3 - x^3 + 1} \end{cases}$$

Bài Toán 25 . Giải hệ phương trình sau
$$\begin{cases} x^4 + y^4 + x^2 + y^2 = x^3 + y^3 + 5xy \\ \frac{x^2 + y^2}{2} + \sqrt{2(x^2 + y^2 + 2)} = \sqrt{2(x^2 + y^2)} + \sqrt{(x + y)^2 + 4} \end{cases}$$

Bài Toán 26 . Giải hệ phương trình sau
$$\begin{cases} 2(x + y) = 4 + (x - y)^2 \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} + xy = 4 + \sqrt{3} \end{cases}$$

Bài Toán 27 . Giải hệ phương trình sau
$$\begin{cases} (3x + y)^2 + 36 = 18(x + y) \\ 2(x + y) + \frac{24}{3x + y} + 9\sqrt{x} = 9\sqrt{y} + 4 \end{cases}$$

Bài Toán 28 . Giải hệ phương trình sau
$$\begin{cases} y^2 + 2x = 1 + \sqrt{1 + x} + 2\sqrt{1 + y} \\ (y - x)(y + 1) + (y^2 - 2)\sqrt{1 + x} = 1 \end{cases}$$

Bài Toán 29 . Giải hệ phương trình sau
$$\begin{cases} 21\sqrt{x} + (y - 7x^2)\sqrt{y} = 315 \\ xy + 7 = (x + 1)(y - 7x - 14) \end{cases}$$

Bài Toán 30 . Giải hệ phương trình sau
$$\begin{cases} \sqrt{3x^2 + 1} + (x + y)\sqrt{y^2 + 1} = 2x \\ 2y^2 + 5x^2 + \sqrt{30x^2y^2 + 6} + 10xy + 1 = y + 5x \end{cases}$$

Bài Toán 31 . Giải hệ phương trình sau
$$\begin{cases} x\sqrt{x} + y\sqrt{y} = 28 \\ x + y + 2\sqrt{\sqrt{x} + \sqrt{y}} + xy = 23 \end{cases}$$

Bài Toán 32 . Giải hệ phương trình sau
$$\begin{cases} x\sqrt{y - 2} + (3y - 7)\sqrt{3x - 1} = 2 \\ (2x + y - 2)^3 + 27(2y + x - 5)^3 = 54 \end{cases}$$

Bài Toán 33 . Giải hệ phương trình sau
$$\begin{cases} 8x^3 + (5y + 7)\sqrt{1 + y} = x(1 + 3y) \\ 16\sqrt{1 + x} + 12\sqrt{1 + y} = y + 8\sqrt{1 - x} + 9 \end{cases}$$

Bài Toán 34 . Giải hệ phương trình sau
$$\begin{cases} (x^2 + 1)(y + \sqrt{2y + 1}) = \sqrt{2x^2 + 1} \\ (1 + 2\sqrt{x + 1})(-1 + \sqrt{2y + 1}) = 2y\sqrt{x^2 + 1} \end{cases}$$

Bài Toán 35 . Giải hệ phương trình sau
$$\begin{cases} (x + \sqrt{x^4 + x^2})(y + \sqrt{y^4 + y^2}) = \frac{2015}{x + y} \\ \sqrt[3]{1 + xy} + \sqrt[3]{1 - xy} = \sqrt[3]{1 + x + y} + \sqrt[3]{1 - x - y} \end{cases}$$

Bài Toán 36 . Giải hệ phương trình sau
$$\begin{cases} y + 12\sqrt{1 + x} = 8\sqrt{1 + y} + 4\sqrt{1 - x} + 7 \\ 3x^3 + (y - x)\sqrt{x + y} = (x^2 + y + 2)\sqrt{y + 1} + xy \end{cases}$$

Bài Toán 37 . Giải hệ phương trình sau
$$\begin{cases} 2\sqrt{x+y-1} + \sqrt{2x-1} = \sqrt{4x^3+3y^2+2} \\ 2\sqrt{\frac{x^2+2}{6}} + \sqrt{\frac{3x-2y}{2}} = \sqrt{\frac{2x^2+4x-y+4}{2}} \end{cases}$$

Bài Toán 38 . Giải hệ phương trình sau
$$\begin{cases} xy + x + y^2 + y = (2x + y - 1)\sqrt{3x + 1} \\ x^2 + 2xy + 3x = y^2 + 4y + 1 \end{cases}$$

Bài Toán 39 . Giải hệ phương trình sau
$$\begin{cases} 8(\sqrt{y} - \sqrt{x}) + \frac{5 - 8y^2}{x} = \sqrt{\frac{y}{x}} \left(8\sqrt{xy} + \frac{1}{xy} \right) \\ 8(x^2 + y^2) + \frac{1}{\sqrt{xy}} = 5 \end{cases}$$

Bài Toán 40 . Giải hệ phương trình sau
$$\begin{cases} (x^2 + 2y)(y^2 + 2x) = \sqrt{-\frac{x+y}{2}} \\ 10(x+y) + 7(x^2 + y^2) + 16 = 10xy \end{cases}$$

Bài Toán 41 . Giải hệ phương trình sau
$$\begin{cases} xy(x + \sqrt{x^2 + 1})(y + \sqrt{y^2 + 1}) = x^2 + y^2 \\ 29y^2 + 8y\sqrt{y^2 - xy} + 4xy = x^2 + 16y\sqrt{3y^2 + xy} \end{cases}$$

Bài Toán 42 . Giải hệ phương trình sau
$$\begin{cases} 9(x^4 + y^4) + 11\sqrt{x^4 - y^4} = 2 \\ (x + 2\sqrt{x^2 + 1})(y + 2\sqrt{y^2 + 1}) = 9xy \end{cases}$$

Bài Toán 43 . Giải hệ phương trình sau
$$\begin{cases} x(\sqrt[3]{1+y} + \sqrt[3]{1-y}) = y(\sqrt[3]{1+x} + \sqrt[3]{1-x}) \\ (x + \sqrt{x^2 + 1})(y + \sqrt{y^2 + 1}) = 2(1 + 3\sqrt{xy})^2 \end{cases}$$

Bài Toán 44 . Giải hệ phương trình sau
$$\begin{cases} x^3 + 3x^2 + 3x = y^3 + 3y^2 + 3y + (xy)^3 \\ 4y^3 - 6y^2 + 3y = 4x^3 - 6x^2 + 3x + 2015xy \end{cases}$$

Bài Toán 45 . Giải hệ phương trình sau
$$\begin{cases} x^3 + 3x^2 + 3x = 2y^3 + 6y^2 + 6y \\ x^2 + y^2 = 2(y\sqrt{x(x+y)} + x\sqrt{y(y-x)}) \end{cases}$$

Bài Toán 46 . Giải hệ phương trình sau
$$\begin{cases} (x + \sqrt{x^2 + 1})(y + \sqrt{y^2 + 1}) = 2 \\ 18x^3 + 16y^2 + 40xy + 34x^2 = 9\sqrt{2x+1} \cdot \sqrt[3]{1-3x} \end{cases}$$

Bài Toán 47 . Giải hệ phương trình sau
$$\begin{cases} x^3 + 3x^2y - 2(y^2 + y^4)\sqrt{2y-1} = 0 \\ 2x^2 + 2y^2 + 4x - y - \sqrt{2-x} - 2\sqrt{3x+6} = 0 \end{cases}$$

Bài Toán 48 . Giải hệ phương trình sau
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + \frac{8xy}{x+y} = 16 \\ \frac{x^2}{8y} + \frac{2x}{3} = \sqrt{\frac{x^3}{3y} + \frac{x^2}{4} - \frac{y}{2}} \end{cases}$$

Bài Toán 49. Giải hệ phương trình sau
$$\begin{cases} (x+y)\sqrt{x^2+2y^2+4y} + x^3 + (x-1)y^2 = xy + 6x + 2y \\ \sqrt{5-4y} - \sqrt{2y+1} + x^2y + 2y = 5 \end{cases}$$