Bài toán 1. Giải phương trình $2\left(x^2+x-1\right)^2+2x^2+2x-3=\sqrt{4x+5}$.

<u>Lời giải.</u>

Điều kiện $x \ge -\frac{5}{4}$.

Đặt $x^2+x-1=y$; phương trình đã cho trở thành

$$2y^2+2\left(y+1\right)-3=\sqrt{4x+5} \Rightarrow y^2+y-1=\frac{\sqrt{4x+5}-1}{2}$$

Đặt $y^2+y-1=\frac{\sqrt{4x+5}-1}{2}=z \Rightarrow 2z+1=\sqrt{4x+5} \Leftrightarrow \begin{cases} z \ge -\frac{1}{2} \\ 4z^2+4z+1=4x+5 \end{cases} \Rightarrow z^2+z-1=x$.

Ta thu được hệ phương trình $\begin{cases} x^2+x-1=y \\ y^2+y-1=z \\ z^2+z-1=x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\left(x+1\right)=y+1 \\ y\left(y+1\right)=z+1 \\ z\left(z+1\right)=x+1 \end{cases} \quad (*)$

Nhận xét: Do $z \ge -\frac{1}{2} > -1$ và $xyz=0$ không thỏa mãn hệ nên $xyz \ne 0; x \ne -1; y \ne -1; z \ne -1$.

Thực hiện nhân từng vế ba phương trình của hệ ta có

$$xyz\left(x+1\right)\left(y+1\right)\left(z+1\right)=\left(x+1\right)\left(y+1\right)\left(z+1\right) \Rightarrow xyz=1$$

Mặt khác cộng từng vế ba phương trình của hệ ta lại có $x^2+y^2+z^2=3$.

Áp dụng bất đẳng thức $AM-GM$ ta có $3=x^2+y^2+z^2 \ge 3\sqrt[3]{x^2y^2z^2} \Rightarrow x^2y^2z^2 \le 1 \Leftrightarrow -1 \le xyz \le 1$.

Hệ phương trình (*) có nghiệm khi đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2=y^2=z^2 \\ xyz=1 \\ z \ge -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x=y=z=1$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=1$.

Bài toán 2. Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 = 3 + 6x - 6z$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{xy + 2 + 3x - 4z}{xz + yz + 3y} + \frac{14}{xy + 6} - \frac{16}{x^2y^2 + 64}$$

<u>Lời giải.</u>

Từ giả thiết, chúng ta có

$$\begin{aligned}
&3 + 6x - 6z = x^2 + y^2 + z^2 \ge 2xy + z^2 \\
&\Leftrightarrow 4 + 6x - 6z \ge 2xy + z^2 + 1 \ge 2xy + 2z \\
&\Leftrightarrow 4 + 6x - 8z \ge 2xy \Leftrightarrow 2 + 3x - 4z \ge xy
\end{aligned}$$

Mặt khác, đi từ đánh giá

$$\begin{aligned}
&(x + y - z - 3)^2 \ge 0 \Leftrightarrow (x + y - z)^2 - 6(x + y - z) + 9 \ge 0 \\
&\Leftrightarrow (x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 6z) + 2xy - 2xz - 2yz - 6y + 9 \ge 0 \\
&\Leftrightarrow 12 + 2xy - 2xz - 2yz - 6y \ge 0 \Leftrightarrow xy + 6 \ge xz + yz + 3y
\end{aligned}$$

Cùng kết hợp với đánh giá AM – GM suy ra

$$x^2y^2 + 16 + 48 \ge 8xy + 48 = 8(xy + 6) \Rightarrow -\frac{16}{x^2y^2 + 64} \ge -\frac{2}{xy + 6}$$

Vậy, biểu thức đã cho được viết lại thành

$$\begin{aligned}
P &= \frac{xy + 2 + 3x - 4z}{xz + yz + 3y} + \frac{14}{xy + 6} - \frac{16}{x^2y^2 + 64} \\
&\ge \frac{2xy}{xy + 6} + \frac{14}{xy + 6} - \frac{2}{xy + 6} = \frac{2xy + 12}{xy + 6} = 2
\end{aligned}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} x = y = 2 \\ z = 1 \end{cases}$